[1851]

A. W. Hertel

Perspective oder die Lehre von den Projektionen

Vorerinnerung.

Insofern die Perspective lehrt, plastische Gegenstände auf einer Ebene so darzustellen, daß deren natürliche Formbildung dem Anschauungsvermögen Anderer verständlich werde, oder daß sie auch wohl eine Art von Täuschung hervorbringe, ist sie dem Techniker, dem Maler rc. unentbehrlich; aber den verschiedenen Zwecken, denen sie dient, entsprechen verschiedene Modificationen dieser Lehre. Die Perspective des Malers ist nicht die des Technikers und umgekehrt. Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Darstellungen, wie sie der letztere braucht, um seinen Ideen Sprache zu geben, und zwischen der Anwendung der perspectivischen Regeln, wovon die Treue einer Naturabbildung abhängt, die den Zuschauer in die Natur selbst versetzen soll.

Hierdurch scheidet sich die Perspective von selbst in zwei Abzweigungen: die orthographische Projectionslehre und die Malerperspective, die jedoch immer Zweige desselben Stammes bleiben. Die orthographische Projectionslehre theilt die meisten Sätze, wiewohl modificirt, mit der Malerperspective. In ihr liegt der Begriff perspectivischer Anschauung in allgemeinster Ausdehnung. Indem sie das Auge in unendliche Ferne entrückt, hebt sie den Stand desselben als Factor der Darstellungsweise auf, fordert aber dafür von dem Anschauenden einfache Vernunftschlüsse von der Zeichnung auf den Gegenstand.

Diese Abtheilung ist es, die für technische Fächer unendliche Vortheile bietet; durch die der Techniker das Werk seines Fleißes und seines Nachdenkens den Arbeitsgenossen, den Bestellern und Allen, die irgend Interesse an seiner Thätigkeit nehmen, zum Verständniß bringen kann; durch die er seine eigenen Ideen sich klar macht. Sie ist die allgemeine Sprache der Industrie, die keines Wörterbuchs bedarf, um sich mitzutheilen und verstanden zu werden, wo Hände und Kräfte für Industrie thätig sind.

Zu der eigentlichen Kunst steht die orthographische Projection nur insofern in Beziehung, als sich jene der stammverwandten Lehre, der Malerperspective, bedienen muß, um die

Natur selbst zu spiegeln; diese aber in ihrem projicirenden Theil von denselben Grundbegriffen ausgeht.

Malerperspective und Centralprojection sind Synonyme. Sie ist dem Künstler das, was die orthographische Projection dem Techniker ist, jedoch mit dem Unterschiede, daß diese schon einiges Verständniß graphischer Ausdrucksweise voraussetzt, weil ihre Darstellungen theilweise einen symbolischen Character annehmen; jene aber in die Formenwelt der Natur selbst einführt und dem Beschauer Bilder zeigt, die den Gewöhnungen des Sehorgans nichts Fremdes bieten dürfen, wenn bei ihrer Ausführung die Regeln der Perspective richtig verstanden worden sind. Sie ist ausschließliches Dominium der Kunst, und nur zuweilen thut die Technik einen Griff über die Grenze.

Wie aber der einfache Umriß, wenn auch zuweilen Meisterwerk, doch kein vollendetes Naturbild gibt, so schließt sich die Malerperspective im engern Sinne an die aus der Physik gegriffene Lehre von dem Licht, Schatten und den Erscheinungeu an, die aus dem Licht hervorgehen. Hieraus entspringt eine neue Abzweigung, welcher man den Namen Luftperspective gegeben hat, während man jene Linearperspective nennt.

Obwohl in enger Abhängigkeit von der Linearperspective, ist die Luftperspective doch nicht integrirender Theil; sie kann jedoch ohne jene nicht bestehen, wohl aber umgekehrt. Die Linearperspective kennt nur Formen, die Luftperspective für sich bloß formlose Nebelbilder. Sie bewegt sich in dem unbegrenzten Lichtraum und macht sich uns erst in ihren Gesetzen erkennbar, indem sie sich der Formenwelt hingibt. Das Licht ist ihre Farbenquelle, die Luft ihre Tonscala, und wo ihr Pinsel nicht hinreicht, hüllt die Natur sich in Schatten.

In dem Gegensatz von Licht und Schatten aber wird dem Auge in dem planen Bilde seiner Netzhaut erst das Plastische klar und dem Sensorium der Begriff von Nähe und Ferne. Er bewirkt sogar bei den symbolischen Gebilden der orthographischen Projection ein leichteres Verständniß und vermag diese der Wahrheit näher zu rücken.

Die Lehre der Luftperspective baut auf ganz andere Grundbegriffe, sie macht sonach eine ganz verschiedene Behandlungsart nöthig und schließt in sich selbst ab.

Wir haben daher auch hier nur die Linearperspective abgehandelt und behalten uns vor, der Luftperspective eine besondere Schrift zu widmen, die indeß als ein zweiter Theil der

vorliegenden betrachtet werden kann, ohne sich als solchen unbedingt aufzustellen.

Die gegenwärtige Schrift zerfällt nach dem Obigen in die Abtheilungen:

a) der orthographischen Projection u.
b) der centralen Projection.

Bei beiden ist in der vorliegenden Schrift das Bedürfniß für den practischen Gebrauch im Auge behalten; daher sind mathematische Deductionen, als dem Plan nicht entsprechend, nur andeutungsweise aufgenommen worden, wo sie nicht ganz ausgeschlossen werden konnten.

Indeß wird niemand verlangen, daß die mathematische Sprachweise wegfallen und die einfachern Elementarbegriffe der Mathematik nicht vorausgesetzt werden mußten, bei einer Lehre, die auf dem Grund und Boden der Mathemaiik fußt. Wer ein solches Buch aufschlägt, sich zu belehren, dem wird es nur halb und schwer gelingen, wenn ihm diese Elemente abgehen.

Meine Ueberzeugung ist, daß eine Regel, eine Aufgabe, in einer dergleichen Wissenschaft, die, um recht populär zu sein, so vorgetragen wird, daß man den Leser von Zirkelstich zu Zirkelstich führt, ihm Lineal und Winkel in die Hand gibt, und selbst deren Führung vorschreibt, mechanisch wohl eingeübt werden kann,

so daß der Schüler diese Aufgabe wird wiederholen können, wenn sie zufällig in seinem Weg liegt; sich aber rathlos umsehen wird, wenn einige Modificationen statt finden sollten. Kurz, daß er damit nichts gelernt hat, als wozu eine Maschine allenfalls auch eingerichtet werden könnte.

Nur in allgemeinerer Auffassung, in dem Ausgange von sicherer Grundlage kann bleibender Erfolg liegen für jede geistige Thätigkeit: um so mehr ist eine Wissenschaft, wie Perspective, ohne Kenntniß der Grundwahrheiten der Mathematik ein mechanisches, tactloses Treiben in Irrgängen.

Eine Erweiterung der graphischen Lehre ist der Schrift in der isometrischen Projectionsmethode beigegeben worden; die um so willkommener sein wird, als sie nur in wenigen deutschen Schriften zu finden ist, während vorzüglich die Engländer das verdiente Gewicht auf sie legen. Diese Projectionsmethode ist vorzugsweise bei Darstellung technischer Gegenstände von großem Nutzen, wozu noch die Leichtigkeit der Ausführung beiträgt. Der vielfache Gebrauch, der von fremder Industrie in der neuern Zeit bei Maschinenzeichnungen und dergleichen gemacht wird, läßt auch bei uns deren Verbreitung wünschenswerth erscheinen.

Zu den Beispielen jeder Abtheilung sind immer solche gewählt worden, die als lehrreich für allgemeinere Anwendung der Regeln erkannt, daher zuweilen auch andern Schriften entlehnt worden, wenn diese sich dem Fall vorzüglich gut anpaßten. Dabei aber ist Sorge getragen, daß eine ganz allgemein gegebene Lösung sich immer noch einem und dem andern speciellen Fall anschmiegt, um dadurch zum vollkommenen Verständniß zu gelangen.

Wenn aber auch alle wesentlichen Fälle durch Beispiele erläutert worden sind, so war es, wie leicht denkbar, doch nicht möglich, die unendlichen Modificationen aufzustellen, deren jeder der einzelnen Fälle fähig ist, und wir müssen deßhalb immer wieder darauf zurückkommen, daß dem Leser die Auffassung einer Auflösung in ihrer allgemeinsten Beziehung dringend zu empfehlen ist. Durch eine Masse von Beispielen würde die Wissenschaft wenig gewonnen, die Vertheuerung der Schrift aber bedeutend zugenommen haben. Ich bin jedoch gesonneu, der Zukunft eine besondere Beispielsammlung zu bieten, wenn die Aufnahme der vorliegenden Schrift und die Verhältnisse günstig sind. In eine solche gehört dann auch die Anwendung der perspectivischen Lehre auf Architectonik, Maschinen, Theaterdecorationen,

Panoramen, Projection auf Flächen, die nicht Ebenen sind und dergleichen mehr.

Wenn ich hiermit versucht habe, den Standpunct zu bezeichnen, aus welchem die Beurtheilung der vorliegenden Schrift geschehen möge, empfehle ich sie wohlwollender Nachsicht und Theilnahme.

Einleitung.

Ueber die verschiedenen graphischen Darstellungsmethoden im Allgemeinen.

1) Unter graphischer Darstellung eines Gegenstandes der Natur oder Kunst verstehen wir das Bild desselben auf einer Fläche, welches dem Auge die Form- und Größenverhältnisse des Objects selbst anschaulich machen soll.

Gegenstände, welche man der graphischen Darstellung unterzieht, können Raumgebilde mathematischer Speculation, wirklich in der Natur bestehende oder herzustellende Gebilde der Kunst und der Technik sein.

2) Das Abbild soll den Eindruck des Urbildes auf das Auge vertreten. Es soll entweder das Urbild bis zur Täuschung festhalten, wie es sich im Auge spiegelt (Malerei), oder es soll ein Verständniß eröffnen von der gegenseitigen Lage, Form und Größenbeziehung seiner Theile (Reißkunst). In dem ersten Falle giebt es den Gegenstand, wie wir ihn sehen, in dem zweiten Falle ist es mehr ein symbolisches Gebild, an das sich die Vernunftschlüsse anknüpfen können.

3) Fasseu wir die verschiedenen Anforderungen auf, die an das Abbild gemacht werden können, den

verschiedenen Gebrauch, der davon gemacht werden soll, die verschiedenartigen Absichten der Verdeutlichung: so wird von selbst klar, daß verschiedene graphische Darstellungsweisen erfordert werden, um dem oder jenem Zweck zu genügen.

4) In den Begrenzungslinien liegt die Gestalt; sie sind daher vorerst das Wichtigere, worauf die Betrachtung sich richten muß. Materie, Farbe, physische Beschaffenheit der Oberflächen bleiben jetzt unberücksichtigt. Und wenn auch später der plastische Eindruck, den Licht und Farbe hervorbringt, zur Betrachtung gezogen werden muß, und abgezweigte Lehren, die Lehre vom Schatten (skiagraphie) und die Luftperspective (perspective aërienne) hervorruft, so sind sie doch nicht denkbar ohne das Vorhandensein des graphischen Bildes.

5) Wir würden aber auch dann aus einem ebenen Bilde das plastische nicht auffinden können, wenn sich das Auge von dem ersten Oeffnen an nicht gewöhnt hätte, dem Tastsinn anzuschließen und durch ihn eine Fertigkeit erlangt hätte, die Erscheinungen der Gegenstärde, die sich in dem Auge selbst nur plan spiegeln, auf die wirklichen plastischen Formen zu beziehen. Es hat sich dadurch ein ziemlich sicherer Maßstab eingeprägt, gewissermaßen Erfahrungssätze gebildet, wodurch sich ihm das ebene Bild leicht zum plastischen gestaltet, und das Auge befähigt, sogar Entfernungen und Raumbedingungen bis zu einem gewissen Grade von Genauigkeit zu erkennen. Licht, Farbe, Schatten befördern die plastische Erkenntniß um Vieles.

6) Damit ein Bild das Auge in dieser Gewöhnung unterstütze und nicht irre leite, muß es dem Spiegelbild im Auge möglichst gleichen, es muß den Gegenstand darstellen, wie wir ihn sehen.

Diese Gleichheit (Congruenz) oder Aehnlichkeit zu erlangen, bedient sich die Graphik bestimmter, der Geometrie entlehnter Regeln. Zuweilen ist es jedoch dem Zweck entsprechender, dem Auge nur ein conventionelles Bild vorzuführen, nicht wie es sich in ihm spiegelt, sondern woraus der Verstand durch andere mathematische Schlüsse die wirkliche Form und die Größenverhältnisse ableiten kann. Dadurch bilden sich in der Graphik zwei verschiedene Abtheilungen, die indeß dieselbe mathematische Kette durchzieht.

7) Was wir sehen nennen, ist diejenige Afficirung des Auges durch rückstrahlendes Licht, wodurch es das Dasein erleuchteter Gegenstände empfindet*).

Es ist daher zum Sehen erforderlich, daß das eigenthümliche Licht selbstleuchtender Körper oder das rückstrahlende (reflectirte) Licht erleuchteter Körper überhaupt ein Bild im Auge erzeuge, und daß dieses an sich todte Bild in dem Sensorium ein lebendiges werde. Wie das Letztere geschieht, ist uns noch tief verschleiert; eben so ist es die Natur des Lichtes. Doch ist es nöthig, von allen dahin gehörigen Theorien eine aufzustellen, wozu wir die wählen, welche bis jetzt die meisten Anhänger zählt, weil sie am besten mit den Erscheinungen in Einklang steht und das gefügigste Fundament zum Anfbau eines Lehrgebäudes abgiebt.

8) Es ist diese die von Euler aufgestellte Wellentheorie (Undulations-, Vibrations-Theorie); sie setzt einen in die kleinsten Molecule verbreiteten Naturstoff, den Aether, voraus, betrachtet

*) Wir werden in einem besondern Abschnitt von dem Bau des Auges handeln, weil diese Kenntniß mit den graphischen Ausführungen eng verbunden ist. Jetzt können wir nur einiges hier Beziehliche davon erwähnen.

das Licht als etwas dem Schalle Aehnliches, nur von einer unendlich geistigern Natur als die Töne, und erklärt es als eine wellenartige Bewegung des Aethers, aus welcher das Licht an sich und mit ihm die Farben zur Erscheinung kommen.

Nach ihr wirken die Aetherwellen auf den Gesichtsnerv gleich wie andere mechanische Kräfte, sind aber die einzigen, welche eine solche Lichtempfindung zu erwecken vermögen, die uns Kenntniß von der Außenwelt mittheilt, die gleichsam das Band der inneren Welt mit der äußern ist.

Die Wirkung, die wir Sehen nennen, besteht sonach aus zwei vereinten Wirkungen: der Aetherwellen und unseres Sinnvermögens. Die Schwingungen der Aetherwellen, sofern sie durch Berührung des Sehnervs das Dasein des Lichtes unmittelbar kund geben, oder durch Vermittelung eines Gegenstandes das Sehen hervorbringen, nennen wir Lichtstrahlen, und deuten uns darunter den geraden (linearen) Weg der Wellenrichtung, in der das Licht wirkt und sich bei gleichbleibendem Mittel in geraden, divergirenden Linien nach allen Richtungen ausbreitet.

9) Wir haben oben selbstleuchtender und erleuchteter Körper erwähnt; jene als Heerd des Lichtes betrachtend, wie Sonne, Fixsterne, Mond, Flammen, ohne diesen Begriff physicalisch genau zu nehmen, diese als lichtempfangend, sofern sie nur unter Einwirkung fremden Lichtes sichtbar werden, indem sie in stärkerem oder schwächerem Grade das empfangene Licht zurückstrahlen und damit secundär selbstleuchtend werden.

Es wirkt nämlich jeder Punct des Körpers, welcher von einem selbstleuchtenden Körper Licht empfängt in secundärem Verhältniß als ausstrahlend, d. i., er sendet ebenfalls nach allen Richtungen Lichtstrahlen aus, von denen einer doch immer unser Auge

treffen muß und sein Bild in dem Auge erzeugt, wenn er nicht durch undurchdringliche Mittel daran verhindert, oder von seiner geraden Richtung abgelenkt wird. Das Zusammentreffen der unendlich vielen Punctbilder im Auge giebt das Gesammtbild des Gegenstandes.

10) Diese etwas materielle Auffassung des Sehens muß uns bei graphischen Constructionen behülflich sein, indem wir nach geometrischen Principien nur Puncte brauchen, um Linien, Linien, um Flächen und Körper zu bestimmen. Sie begründet demnächst die Lehren von der Beleuchtung, den Schattengrenzen und Schattenprojectionen.

11) Denkt man einen beleuchteten Gegenstand im Raume, nimmt an, daß das unbeweglich stehende Auge auf ihn gerichtet ist und zwischen ihm und dem Gegenstand eine durchsichtige Ebene (Glastafel, Flor), so läßt sich annehmen, daß von jedem dem Auge zugewendeten Punct des Gegenstandes ein Lichtstrahl dem Auge zugehen und auf seinem Wege die durchsichtige Tafel durchdringen wird.

Könnte sich jeder dieser Durchgangspuncte auf der Tafel fixiren, so würden sie zusammen, wo nicht ein geometrisch ähnliches, doch ein solches Bild des Objects geben, wie es das Auge in der Natur sieht.

Das Bild würde kleiner sein, als das Object, wenn dieses hinter der Tafel, größer, wenn es zwischen der Tafel und dem Auge befindlich, also im letztern Falle von der Verlängerung der Strahlen gebildet wurde.

12) An die Stelle der als durchsichtig gedachten Ebene kann zuweilen eiue gewölbte, gebrochene oder andere Ebene treten, die das Bild aufzunehmen bestimmt ist. Es hindert dann nichts, einen solchen Fall auf den einer Ebene zurückzuführen und dieselben graphischen Sätze anzuwenden; wenn auch eini-

ge Zwischenschlüsse nöthig werden, weil die Durchgangspuncte in verschiedenen Parallelebenen liegen.

13) Man hat vorgezogen, diese hier angedeutete Vorstellungsweise allen graphischen Theorien zu unterlegen, weil sie sich mehr als andere der Wirklichkeit einfach und anschaulich anpaßt und nur einfacher geometrischer Sätze zur Durchführung bedarf. Man giebt ihr den Namen „Glastafelperspective". Zu besserem Verständniß des Folgenden müssen wir schon hier etwas tiefer in das Wesen derselben eingehen.

14) Denken wir uns einen Gegenstand, z. B. einen Würfel, zwischen ihm und dem Beleuchtungsheerd (Sonne, Kerzenflamme ꝛc.) das Auge und von jedem Puncte des irgendwie beleuchteten Gegenstandes unzählige Lichtstrahlen divergirend zurückstrahlen, deren einer gewiß das Auge trifft. Setzen wir die relative Stellung des Auges, in Bezug auf den Würfel **A** oder **B** (Fig. 1.) und auf die durchsichtige Tafel **PQ**, die das Bild aufnehmen soll, in **O**; die von Puncten wie **a**, **b**, **c**.... oder **e**, **f**, **g**.... dem Auge zugehenden Lichtstrahlen sind dann **aO**, **bO**, **cO**....; wir nennen sie Gesichtslinien, Sehstrahlen.

Die von dem Würfel **A** ausgehenden Sehstrahlen nehmen ersichtlich ihre Richtung durch die durchsichtige Fläche (Bildfläche, Bildebene, Tafel) **PQ** und durchdringen sie in den Puncten **k**, **l**, **m**...., welches gleichmäßig mit der Verlängerung der Strahlen **Oe**, **Of**, **Og**.... geschieht, wenn wir Bezug auf den Würfel **B** nehmen.

Durch die auf der Tafel fixirten Durchgangspuncte sind aber auch die Begrenzungskanten der Flächen und somit das Bild des Würfels hergestellt, wie es sich auf der Spiegelfläche des Auges oder auf ebener Fläche niederlegt.

15) Eine andere Entstehungsart des Bildes läßt sich so erklären, daß man eine Gerade unbiegsam aber beweglich denkt, ohne daß das eine Ende den Punct O verläßt. Führt man diese Gerade tangirend an den Kanten oder den gebogenen Flächen des Objects herum, so umschreibt die Gerade einen pyramidalen oder conischen Raum, wo jeder Querschnitt als ebenes Bild des Objects betrachtet werden kann. Diese Auffassungsweise kann bei graphischen Constructionen oft mit Vortheil zur Erklärung benutzt werden.*)

16) Graphische Darstellungen, deren Entstehung auf die beschriebenen Arten abgeleitet werden können, heißen Centralprojectionen, auch perspectivische Bilder, und die Lehre, ein dergleichen Bild nach geometrischen Regeln zu entwerfen, nennt man Perspective (Scenographie). Zuweilen braucht man diese Benennung für das Bild selbst.

17) Die perspectivischen Bilder kommen ihrem Princip nach auf subjective Wahrheit hinaus, d. i. sie zeigen nicht die wahre, sondern nur die scheinbare Gestalt der Dinge. Wir sehen sie aber auch nicht anders in der Natur, und leiten durch Uebung und Vernunftschlüsse ihre eigenthümliche Gestalt und Größe aus der scheinbaren ab. Jede veränderte Stellung des Auges gegen das Object verändert dessen scheinbare Gestalt, wie in der Natur, so im perspectivischen Bilde.

18) Die Perspective findet ihre Anwendung, wo es auf Nachahmung der Natur, auf Täuschung an=

---

*) Auf derselben beruht die Einrichtung mancher Instrumente, die man zu Aufnahme eines perspectivischen Bildes vorgeschlagen hat. Sie treffen im Allgemeinen darin überein, daß das Auge in O fixirt ist und einem Stift folgt, der auf der durchsichtigen Tafel zeichnend so geführt wird, daß er in jedem Momente seiner Bewegung in einer Gesichtslinie nach einem Puncte des Objects beharret.

kommt, wie in der Malerei, Bauzeichnung, Theater-decoration 2c. Ihren Bildern haftet aber der Mangel an, daß aus ihnen nur mit Schwierigkeit ein Schluß auf die wahren Dimensionen gezogen werden kann; selbst die relativen Verhältnisse sind nur dem geübteren Auge erkennbar. Daher kommen perspectivische Bilder zu technischem Zwecke nur in untergeordnete Anwendung.

Es ist, wie bereits erwähnt, nicht unerläßliche Bedingung, daß die Bildfläche eine Ebene oder senkrecht der Horizontalebene sei, vielmehr darf der Allgemeinheit wissenschaftlicher Ausführung keine, wie immer entstandene Bildfläche entzogen werden; und in der That bedarf die Malerei, namentlich die decorative oder monumentale, die Anwendung der Perspective auf gewölbte, gebrochene, cylindrische, geneigte Flächen.

19) Wird die in 15 gedachte Erzeugungslinie bei ihrer umschreibenden Bewegung in stets paralleler Lage mit irgend einer Ebene gedacht, dann wird der umschriebene Raum ein prismatischer oder cylindrischer, und das Bild ebenfalls Durchschnitt dieses Raumes. Hierbei setzt man den Schnitt (die Glastafel) immer als Ebene voraus. Das perspective Princip hört auf, und man nennt das so erzeugte Bild eine orthographische oder Parallel-Projection (Vogelperspective). Die Ebene, die das Bild aufnimmt, heißt hier eine Projectionsebene, die erzeugende Linie eine projicirende Linie.

Dergleichen Projectionen geben Bilder, die den Anforderungen der Technik in vielen Beziehungen besser entsprechen und deßhalb dabei häufiger angewendet werden, als die perspectivischen Bilder.

Es läßt sich die Entstehung eines orthographischen Bildes zwar auch auf die perspectivische zurückführen und annehmen, daß die erzeugende Linie in allen La-

gen durch den Punct O (das Auge) gehe; dieser Punct liegt aber hier in unmeßbare Ferne von dem Gegenstand abgerückt; die wissenschaftliche Ableitung kann sonach bei beiden Bildern auf ein Princp zurückgeführt werden und thut wenigstens immer ihre enge Verwandtschaft kund.

20) Wir müssen diese Erklärung in dem Folgenden umfassender ausbilden:

Ist A (Fig. 2) ein Würfel und PQ die Bildtafel, hier Projectionsebene, so fasse man die erzeugende Linie in dem Moment auf, wo sie in ihrer parallelen Bewegung mit der horizontalen (oder andern Ebene) den Punct a aufnimmt; denke ihre weitere Bewegung gleitend an der Kante nach b, dann nach c 2c. hin, und die successiven Durchgangsmomente dieser Linie in der Ebene PQ: so werden dem Beharrungsmomente a der Punct n, dem Moment b der Punct p 2c. des Durchgangs entsprechen. Es wird also bloß darauf ankommen, die Projectionen der Puncte a, b, c .... in n, p, r .... darzustellen, um bei gehöriger Fortsetzung sämmtliche End- und Bestimmungspuncte, durch deren Verbindung die Kanten, Umrisse, und somit das Bild des Körpers in Linien zu erhalten.

Bei einem Körper von gekrümmter Oberfläche ändert sich diese Ansicht nur insofern, als man die Beharrungsmomente der erzeugenden Linie in beliebigen Tangentialpuncten annimmt.

Auch wird eine solche Projection sich immer ergeben, die erzeugende Linie mag senkrecht oder geneigt gegen die Projectionsebene gedacht werden. In dem ersten Falle nennt man die Projection eine normale, gerade, auch orthogonale, und diese wird ihrer Einfachheit wegen am meisten angewandt; im zweiten Falle ist es eine schräge, schiefe Projection.

21) Parallelprojectionen haben ihrer Entstehung zufolge zwar nicht die subjective Wahrheit der Centralprojectionen, enthalten aber eine größere objective Wahrheit, indem das geometrische Größenverhältniß aller einzelnen, in einer durch den Körper zu legenden beliebigen Fläche sich befindenden Dimensionen vollkommen identisch ist mit dem Größenverhältniß der Projectionen dieser Dimensionen; ein Umstand, der sich bei passender Wahl der Projectionsebenen gegen den abzubildenden Gegenstand leicht zu Bestimmung der natürlichen Größenverhältnisse benutzen läßt.

Dazu dient besonders die Projection eines Körpers auf verschieden gestellte Projectionsebenen, wodurch eine der andern zur Erläuterung und Vervollständigung hilft.

22) Es werden gewöhnlich drei Projectionsebenen angenommen, deren eine **M N** (Fig. 3) horizontal, die andern **P Q** und **R S** normal auf jene und unter sich gestellt werden. Die Projectionen des prismatischen Körpers **A** auf diese drei Projectionsebenen sind dann **a**, **B** und **C** und man unterscheidet sie durch die Benennungen erste, zweite, dritte Projection, nennt auch in der Praxis des Zeichnens die erste Projection **B** den Grundriß, die zweite **a** den Aufriß, die dritte **C** das Profil. Die Linien, wo zwei Projectionsebenen sich schneiden, heißen die Projectionsaxen, und diese sind von besonderer Wichtigkeit.

Die oben erwähnte Stellung der drei Projectionsebenen kommt in den technischen Betrieben am meisten vor, und befähigt den Arbeiter, die Dimensionen eines anzufertigenden Gegenstandes ohne Schwierigkeit aus der Zeichnung zu entnehmen.

Unmittelbar kann dies geschehen bei Linien, die mit einer der Projectionen parallel laufen; sind sie

geneigt, so führt doch ein sehr einfaches Verfahren zur Bestimmung der wahren Größe und Lage, wobei die drei Projectionen sich gegenseitig unterstützen.

23) Bei der Ungebundenheit, die Stellung der Ebenen, welche die Projectionen aufnehmen sollen, unter sich beliebig anzunehmen, lassen sich verschiedene Arten von Parallelprojectionen denken, die in speciellen Fällen für den Techniker eine vor der andern Vorzüge haben. Die systematische Aufstellung des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Parallelprojectionen verlangt die Darlegung einiger Sätze aus der Projectionslehre.

Diese bestimmt nämlich die Lage eines Punctes im Raume durch die Entfernungen desselben von Ebenen, welche eine normale oder andere Lage gegen einander haben, Coordinatenebenen heißen und das sind, was wir in der beschreibenden Geometrie Projectionsebenen nennen. So treten bei jener die Benennungen Coordinatenaxen, Coordinaten an die Stelle der Projectionsaxen, projicirenden Linien bei dieser. Die Projectionslehre schreibt eine bestimmte Lage der Coordinatenebenen in Bezug auf eine andere, vielleicht durch die Richtung der Schwerkraft natürlich gegebene, keineswegs vor; die beschreibende Geometrie zwar auch nicht, nur daß diese es in ihrer Anwendung auf die Darstellung concreter Fälle angemessen findet, eine der Projectionsebenen vertical, die andere horizontal einzuführen.

24) (Fig. 4) Es mögen nun xy, xz, xv die Durchschnittslinien dreier unter sich normaler Ebenen sein*), diese Coordinatenaxen und deren Neigungen zu einer Projectionsebene **PQ** mögen aber so

---

*) Es treffen sich nämlich die Ebenen Ax, Bx in der Linie xy, die Ebenen Ax, Cx in der Linie xz, und die Bx, Cx in xv.

gewählt sein, daß die orthogonalen Projectionen der Kanten xy, xz und xv in einem gegebenen Verhältniß stehen, von welchen dann die Neigungswinkel dieser drei Projectionen unter sich, so wie die der Coordinatenebenen zu der Projectionsebene PQ abhängig werden. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, der Punct x, wo die drei Coordinatenaxen sich vereinigen, läge in der Ebene PQ selbst, ohne Präjudiz, daß sie nicht jeden Abstand von x annehmen könne.

Setze man: a sei ein Punct im Raume, durch die projicirenden Linien aa_1, aa_2, aa_3 auf die Cordinatenebenen und durch die Ordinaten ma_1, na_1, na_2, pa_2, ma_3, pa_3 bezogen, so erhellet, daß die Stücke xp, xm und xn in gleichem Verhältniß der Ordinaten stehen werden.

Daraus folgt, daß gleich großen Stücken von xp, xm und xn Projectionen entsprechen müssen, welche sich wie die Projectionen xy, xz, xo der einander gleichen Coordinatenaxen verhalten; das Verjüngungsverhältniß ist unverändert geblieben.

Werden nun die projicirenden Linien und mit ihnen die Coordinaten des Punctes a als gegeben vorausgesetzt, so sind auch die denselben gleichen Stücke xp, xm, xn gegeben. Vermittelst derselben ist es nun sehr leicht, den Punct a in der Ebene PQ darzustellen und bei weiterer Bestimmung von Puncten die Grenzlinien eines Objects auf eine Ebene im Bilde niederzulegen. Wegen Verschiedenheit der Projectionen der Coordinatenaxen und ihrer Neigungswinkel unter sich, nennt man nach Weißbach*) Projectionen dieser Art „anisometrische."

---

*) Polytechnische Mittheilungen von Dr. Volz und Karmarsch; Band I., S. 125 — 136. Wir sind in dem

25) Nehmen die Coordinatenebenen eine solche Lage zur Projectionsebene **PQ** an, daß zwei ihrer Coordinatenaxen gleichgroß, verschieden daher von der dritten in ihrer Projection erscheinen, so werden folgerecht nur die Winkel der zwei gleichen Projectionen mit der Projection der dritten Axe gleich groß sein. Unter diesen Umständen heißen die daraus hervorgehenden Projectionen „monodimetrische.*)

26) Isometrische Projectionen sind solche, wobei drei gleiche Projectionen der drei gleichen Coordinatenaxen Statt finden. Bei ihnen sind die projicirten Neigungswinkel gleich, und jeder $\frac{4}{3}$ **R** = 120°. Die isometrischen Projectionen eignen sich vorzüglich wegen der Leichtigkeit ihrer Ausführung zu technischen Zeichnungen, indem hier der nämliche Maßstab auf alle drei Coordinatenaxen angelegt werden kann.**)

27) Fällt eine der Coordinatenaxen in die Projectionsebene **PQ** oder ist mit ihr parallel, dann nähern sich die Projectionen der beiden andern Axen

---

Folgenden im Wesentlichsten einem Aufsatz gefolgt, der den Lehrer an der Kön. Gewerbsschule zu Chemnitz H. v. Bünau zum Verfasser hat, und durch das Eindringen in das Wesen der Projectionen, durch Klarheit und Sicherheit der Darstellung, sich zu dem Vorzüglichsten erhebt, was mir über diesen Gegenstand bekannt geworden; weshalb ich glaube, dadurch den Dank der geehrten Leser zu verdienen.

*) Am angeführten Orte ausführlich nachzulesen.

**) Die Benennung „isometrische oder isoperimetrische Perspective" ist von ἴσος, gleich und περίμετρος, Umfang, hergenommen. Dergleichen Projectionen wurden zuerst von dem Engländer Will Farish für Maschinenzeichnung benutzt. Er beschrieb sie als „On Isometral Perspective" in zwei Reden am 21. Febr. und 6. März 1820, gehalten in der Philos. society; die Lehre wurde später in England weiter ausgebildet und fand auch in Deutschland, besonders durch Möllinger, lebhaften Anklang.

jener mehr in rechtem Winkel, und die daraus hervorgehende Projection tritt in die Kategorie der einfach-schiefen.

28) Erhalten die Projectionen der beiden zur Seite liegenden Coordinatenaxen gleiche Länge, so geht die Projection in die sogenannte Uebereck- oder Diagonal-Projection über.

29) Fallen zwei Coordinatenaxen mit der Projectionsebene PQ zusammen, dann wird die Projection der dritten gleich Null, und es entsteht die einfache Orthogonal-Projection.

30) Man kann eine figürliche Uebersicht der aufgezählten Parallel-Projectionen gewinnen, wenn man das Verhältniß der drei Axen in ihrer Projection und die Winkel, unter welchen sie in der Projectionsebene gegen einander geneigt sind, zeichnet.

(Fig. 5.) Wird die eine der Projectionsaxen vertical angenommen, so ergibt sich das verzeichnete Schema.

Hierbei ist das Größenverhältniß der drei Axen bei A und B ganz willkürlich angenommen, und beide Darstellungen sind, nebst D, einzelne Glieder einer großen Reihe möglicher Verhältnisse, welche die Axen eingehen können.

Bei D bezieht sich das Prädicat „schief" nicht auf die Neigung der projicirenden Linien gegen die Projectionsebene, sondern vielmehr auf die Stellung des Objects gegen diese.

31) Schräge Projectionen, wo die projicirenden Linien einen schiefen Winkel gegen die Bildebene machen, werden beim Zeichnen technischer Gegenstände selten gebraucht, werden aber herkömmlich noch bei Fortificationszeichnungen zuweilen angewandt. Man nannte sie Vogel- oder Militär-Perspective; ersteres, weil man annahm, ein Vogel in der Höhe werde terrestrische Gegen-

stände auf diese Weise (auf eine verticale Ebene projicirt) erblicken.

32) Ein specieller Fall, den man unter Cavalier-Perspective versteht, (Fig. 6.) kann am besten durch einen Würfel erläutert werden. Nimmt man ihn als Object, und eine der Seitenflächen parallel zur Projectionsebene an; setzt man ferner, die erzeugende Linie mache mit der Projectionsebene einen Winkel von 60° 9¾, und sei einer Ebene parallel, welche unter 55° gegen die Projectionsebene der Kanten des Würfels parallel liegt: dann erscheinen die Kanten eines so projicirten Würfels gleich groß, und je drei bilden in ihrer Projection an ab die Winkel von 90°, 135° und 45°.

Je drei an einem Eckpunct liegende Flächen des projicirten Würfels lassen sich dann als Projectionsebenen für die bildliche Darstellung verschiedener anderer Objecte benutzen und bieten große Bequemlichkeit beim Auftragen. Der Wahrheit aber werden so entstandene Projectionen für den Beschauer desto näher kommen, je weniger sich die Neigung seiner Gesichtslinien gegen die Darstellungsebene von dem vorhin bemerkten Neigungswinkel der Erzeugungslinie zur Projectionsebene entfernt.*)

33) Wenn bei der Cavalier-Perspective alle Kanten des Würfels gleich lang erscheinen, so wird irgend eine andere Lage der Erzeugungslinie eine Darstellung herbeiführen, die alle übrigen Eigenschaften der Cavalierperspective theilt, bei welcher aber die zur Projectionsebene rechtwinklig stehenden Kanten des Würfels verkürzt erscheinen. Dieser

*) Die Begründung und die Regeln der Cavalier-Perspective hat der Prof. Haindl in einem Aufsatz des Kunst- und Gewerbblattes des polyt. Vereins für das Königreich Baiern, Band 21, Heft 7, niedergelegt.

Darstellungsmethode entspricht das unter dem Namen der Vogelperspective aufgestellte Bild. Es wird leicht sein, auch hier die Neigungsverhältnisse der Erzeugungslinie gegen die Axen aufzufinden, durch welche die erwähnte Verkürzung der Würfelkanten irgend einen bestimmten Grad erreicht.

34) Unter fingirter Projection kann man den Fall denken, daß zur Darstellung der einen Begrenzungsfläche eines zu zeichnenden Gegenstandes den projicirenden Linien eine andere Lage gegen die Projectionsebene gegeben wurde, als bei der Darstellung der andern Seiten. Eine solche fingirte Projection hat daher auf Wahrheit weder in objectiver noch subjectiver Hinsicht Anspruch.

Uebersichtliche Zusammenstellung

der verschiedenen Projections-Methoden.

35) I. **Central-Projection**, Perspective, perspectivisches Bild.

II. **Geometrische Projectionen**, Parallelprojectionen.

A. Orthogonale mit rechtwinklicher Lage der projicirenden Linien gegen die Projectionsebenen.

a. zwei Ordinaten sind von gleichem, unverkürztem Längenverhältniß, die dritte gleich Null: Grundriß, Aufriß.

b. eine Coordinate ist von unverkürztem, die beiden andern von verkürztem, aber verschiedenem Ausdehnungsverhältniß: einfach schiefe Projection.

c. eine Ordinate ist von unverkürztem, die beiden andern sind von verkürztem, aber gleichem Ausdehnungsverhältniß: Uebereck-, Diagonal-Projection.

d. Zwei Ordinaten haben ein und dasselbe verkürzte, die dritte hat ein anderes, ebenfalls verkürztes Ausdehnungsverhältniß: monodimetrische Projection.

e. Alle drei Coordinaten sind von gleichem verkürzten Ausdehnungsverhältniß: isometrische Projection.

f. Jede der drei Coordinaten hat ein verschiedenes, aber verkürztes Ausdehnungsverhältniß: anisometrische Projection.

B. Schräge geometrische Projection: im Allgemeinen Vogel- oder militärische Perspective, und für den besondern Fall, daß sich die drei Kanten des Würfels gleich lang projiciren, Cavalier-Perspective.

III. **Fingirte Projection**, durch Combination zweier der vorhergehenden Voraussetzungen entstanden.

36) Um die Verschiedenheit des Bildes zu zeigen, welches durch die angeführten Projectionsarten entsteht, ist auf Tafel I, A ein und derselbe Gegenstand nach den verschiedenen Methoden dargestellt worden. Fig. 7, 7a, 7b geben den Aufriß, Grundriß und die Seitenansicht nach der unter II, A, a angegebenen Methode, bei welcher der Gegenstand, mit seinen rechtwinklich gegen einander stehenden Hauptdimensionen, den Coordinatenaxen parallel liegt und von den letzteren in jeder Darstellung eine gleich Null wird. Es entspricht dieser Fall offenbar dem Fig. 5 unter f gezeichneten Axenverhältniß. Diese Darstellungsmethode ist die gebräuchlichste im Maschinenfach, in der Baukunst, der practischen Geometrie, überhaupt im Gebiete der Technik. Obgleich sie ein übersichtliches Gesammtbild des

Gegenstandes nicht gibt, sondern zu dessen Zusammensetzung ein geübtes Auge voraussetzt, so ist sie doch bequem, weil sie in der kürzesten Zeit ausgeführt werden kann und weil bei ihr zwei Kantensysteme in wahrer Größe erscheinen. Man nennt dergleichen Darstellungen allgemein Risse eines Gegenstandes.

37) Minder allgemein wird die durch Fig. 8. versinnlichte Darstellungsweise (die einfach schiefe Projection), welche dem Fall d Figur 5 entspricht, angewendet. Bei dieser fällt eine der Coordinationsaxen mit der Projectionsebene zusammen, und es kann daher auch nur für diese der Maßstab zur directen Ermittelung der wahren Größe angelegt werden.

Die Kanten der übrigen Systeme erscheinen verjüngt, und zwar ist in der Figur für die linke Axe das Verjüngungsverhältniß ungefähr 100 : 78, für die rechte Axe 100 : 63 gebraucht worden.

Zu Beseitigung der Unbestimmtheit bedient man sich dann des Grundrisses, den man beifügt; dann gewähren aber diese beiden Projectionen zusammen mehr Uebersicht der Form als jene drei des ersten Falles. Die Brauchbarkeit einer dergleichen Darstellung gewinnt noch, wenn man sich für die Projectionen der Seitenaxen Maßstäbe nach dem gewählten Verjüngungsverhältniß entwirft.

38) Nimmt man in den zuletzt beschriebenen Projectionen das Verjüngungsverhältniß der beiden nach rechts und links sich ausdehnenden Axen gleich groß, (nemlich $1:\sqrt{\frac{1}{2}}$), so hat man den unter II, A, c oder unter e Figur 5 angegebenen Fall der Diagonalprojection, bei welcher die Höhendimension unverkürzt, die mit den horizontalen Coordinatenaxen parallel liegenden Dimensionen aber im Verhältniß $1:\sqrt{2}$ verkürzt werden. Das auf diese Art entste-

hende Bild kommt dem von Fig. 8 sehr nahe, besitzt auch ziemlich dieselben Eigenthümlichkeiten, weshalb dessen Darstellung hier erspart werden kann.

Bei Darstellungen von Gegenständen mit quadratischer Grundfläche decken sich die diagonal liegenden Theile der Mitte, was diese Methode bei solchen unvortheilhaft macht.

39) Die monodimetrische Projection die Figur 9 gebraucht worden, wird durch die Gleichheit zweier Projectionsaxen und ihrer Neigungswinkel characterisirt. Am einfachsten ist bei dieser Projectionsart das Verhältniß der Coordinatenaxen wie 1 : 1 : ½ zu wählen, wo dann die Neigungen der Projectionen dieser Axen die Winkel von 97° 11′, 134° 24½′ bilden, so wie es bei vorliegender Figur geschehen ist.

Das Zeichnungsverfahren wird durch das einfache Axenverhältniß sehr erleichtert, und das Abnehmen der Maße kann durch einen für die eine Axe geltenden Maßstab bewerkstelligt werden.

Das monodimetrische Bild zeigt, verglichen mit der isometrischen Darstellung den Gegenstand in mehr aufrechter, gewohnterer Stellung. Die Darstellungsmethode läßt vornemlich die den Hauptaxen parallel liegenden Theile leicht finden, was sie mit der isometrischen Methode gemein hat, und würde daher, so wie letztere, besonders für solche Gegenstände, die rechte Winkel bilden, wie Holz- und Steinverbände, Durchschnitte von Bauconstructionen, Ofeneinrichtungen u. dergl., zu empfehlen sein.

40) Werden, wie in c Figur 5, die Projectionen der gleichgroßen Coordinatenaxen einander gleich gewählt, so bilden jene auch gleiche Winkel, nemlich 120°. Wegen diesen Uebereinstimmungen hat man die Benennung „isometrische Projection“ gewählt. Die wahre Größe einer der Coordinaten-

aren ist dann $\sqrt{\frac{3}{2}}$, sobald ihre Projection der Einheit entspricht, oder der Hypotenuse eines rechtwinklichen gleichschenklichen Dreiecks gleich, deren eine Kathete Höhenlinie eines gleichseitigen, die Einheit zur Seite habenden Dreiecks ist. Das Bild in isometrischer Projection zeigt Figur 10.; es wird durch dasselbe ein richtiges Maßverhältniß über alle mit den Hauptaren parallele Kanten erhalten. Handelt es sich um die wahren Maße, so ist dazu nur ein auf $\sqrt{\frac{2}{3}}$ verjüngter Maßstab nöthig. Sie ist dann Aufriß, Grundriß und Seitenansicht zugleich nach einerlei Maßstab, jedoch mit verzogenen Winkeln und — was ihr einen vorzüglichen Werth gibt — gewährt vom Gegenstand eine klare Vorstellung in höherem Grade, als eine perspectivische Ansicht, indem der Parallelismus der Linien den gewohnten Begriffen bei weitem mehr entspricht, als die Convergenz der perspectivischen Linien.

Unter sämmtlichen Projectionsmethoden erfordert die isometrische Projection die einfachsten Mittel, ist dagegen nur dann recht brauchbar, wo der Gegenstand fast lauter Begrenzungslinien hat, die mit den drei rechtwinklichen Coordinatenaren parallel laufen, und wenn Gegenstände dargestellt werden, die man von einem höhern Standpunct aus zu sehen sich gewöhnt hat. Schattenseiten dieser Methode werden durch die großen Vorzüge mehr als genügend aufgehoben.

41) Werden, wie bei a Figur 5, die Projectionen der Coordinatenaren in einem willkührlichen Verhältniß genommen, so daß z. B. deren Verjüngungen im Verhältniß 1 : 0,9 : 0,5 stehen, und somit auch die Neigungswinkel ungleich (hier 95° 11′, 157° und 107° 49′), so entsteht die anisometrische Projection. In Figur 11 ist das angegebene Verhältniß angewendet und dadurch diese

noch aufgerichteter im Bilde als in Figur 9 erlangt worden, was zuweilen besondern Werth haben kann.

Der Umstand, daß man den verschiedenen Richtungen nach auch verschiedener Maßstäbe bedarf, um die wirklichen Maße bestimmen zu können, hebt den Vortheil, welchen die anisometrische Methode technischen Zeichnungen gewähren würde, ziemlich auf.

Es ist daher die Anwendung der erwähnten Darstellungsmethode da von Vortheil, wo möglichst subjective Wahrheit des Bildes als Hauptbedingung auftritt, nicht aber, da wo man Dimensionen bequem will abnehmen können.

Sie und die monodimetrische Projectionsmethode wurden bisher — wenn auch nicht unter diesen Namen — nur beim Darstellen von Krystallgestalten gebraucht und bleiben zu diesem Zweck auch die vorzüglichsten.

42) Die Cavalierperspective ist bei Figur 12 in Anwendung gebracht. Um bei ihr dem Auge die richtige Stellung anzuweisen, in welcher die Anschauung ein Bild von einiger Wahrheit empfängt, muß man sich eine Verticalebene durch die Axenlinie der Zeichnung denken, in diese das Auge bringen und das Blatt dann so neigen, daß die Gesichtslinien mit dem Blatte einen Winkel von ungefähr $\frac{2}{3}$ R bilden. In jeder andern Stellung des Auges, namentlich in der gewohnten mit rechtwinklich gerichteter Gesichtslinie empfängt man ein verzogenes Bild.

Ein Vorzug der Cavalierperspective besteht in dem bequemen Zeichnen der Figur und darin, daß die Seite des Gegenstandes, welche der Bildebene parallel, den reinen geometrischen Aufriß gibt.

In dieser Beziehung tritt selbst die isometrische Projection zurück, die aber ein deutlicheres, den Schein der Wahrheit vollkommener gebendes Bild gewährt.

43) Die Figur 13 zeigt das perspectivische Bild oder die centrale Projection des Gegenstandes. Im Allgemeinen bedürfen die Centralprojectionen den meisten Zeitaufwand und Constructionsraum; sie finden häufige Anwendung in der Malerei, Baukunst, Theaterdecoration und haben den Schein der vollen Wahrheit in sich, weil das Bild den Gegenstand so darstellt, wie ihn das Auge in der That sieht. Mit einigen Umständen lassen sich in einer dergleichen Projection die wirklichen Maße ebenfalls abnehmen, demungeachtet eignen sie sich wenig zu Maschinenzeichnungen, noch weniger zu Darstellungen von Krystallgebilden, dagegen sind sie dem Maler unentbehrlich.

Die nothwendigsten Elemente der allgemeinen Projectionslehre*)

44) Bezieht man die abstracte Lage eines Punctes, einer Linie oder Fläche im Raume auf zwei oder mehrere gegenseitig bestimmte, unbegrenzte Ebenen, so läßt sich Rechenschaft geben über die Stellung dieses Punctes, der Linie oder Fläche.

Solche in fester Beziehung unter einander bestehende Ebenen heißen allgemein coordinirte Ebenen; die Linien, in welchen sie sich schneiden,

*) Diese Sätze, welche das Hauptsächlichste der Projectionslehre enthalten, werden hier vorangestellt, um bei der beschreibenden Geometrie darauf Berufung nehmen zu können. Voraussetzend, daß der Leser die elementare Geometrie so weit inne haben wird, um die ziemlich einfachen Beweise nöthigenfalls auffinden zu können, sind diese hier weggelassen worden. Wenn auch die hier vorgetragenen Sätze nicht als vollständiges Lehrgebäude der Projectionslehre gelten können, so sind sie doch ausreichend, um das wissenschaftliche Verständniß des Folgenden zu eröffnen, die Grundsteine, auf welche die beschreibende Geometrie weiter bauen kann, die Basis der Parallel-, Centralprojectionen (Perspective) und der Schattenconstructionen.

nennt man Coordinatenaxen, Projections-axen oder gemeinhin Axen. Gewöhnlich genügt es, zwei coordinirte Ebenen anzunehmen, die in allgemeiner Anschauung zwar jede beliebige Neigung gegen einander haben können, bei practischer, technischer Anwendung aber immer normal angenommen werden (Fig. 14.), so daß die eine lothrecht, die andere wagerecht gedacht wird. In dieser Voraussetzung heißt dann die Ebene **MN** die horizontale oder erste, die **NP** die verticale oder zweite Projectionsebene; dabei hindert nichts, durch Verwenden die eine für die andere zu setzen und zu bezeichnen.

Des bequemern Ausdrucks wegen bezeichnen wir durchgehends die Horizontalebene mit G^1, die Verticalebene mit G^2, die Axe oder Durchschnittslinie der beiden Ebenen mit G^0. Ferner setzen wir den Bezeichnungen derjenigen Punkte, Linien und Flächen, welche in der ersten Projectionsebene liegen oder darauf Bezug nehmen, das kleine Zahlzeichen 1, der, welche auf der zweiten Projectionsebene liegen oder sich auf sie beziehen, das Zahlzeichen 2 oberhalb (in der Stellung von Exponenten) bei; ebenso bei einer dritten Projectionsebene und bei den beziehlichen Axen. Andere Bezeichnungen werden in der Folge noch erörtert werden.

45) Wird durch einen Punct **a** im Raume eine Linie normal nach einer der Projectionsebenen G^1 oder G^2 gedacht, wie aa^1 oder aa^2, so heißen die Puncte a^1 und a^2, wo jene Linien die Projectionsebenen treffen, die Projectionen des Punctes **a**, und dann ist a^1 die erste oder Horizontalprojection, a^2 die zweite oder Verticalprojection dieses Punktes **a**.

Dabei nennt man die Normalen aa^1, aa^2, oder allgemeiner die Parallelen mit den beiden Pro-

jectionsebenen durch a die projicirenden Linien, die auf G^1 und G^2 liegenden, mit ihnen parallel laufenden, nemlich a^1a^0 und a^2a^0 die Coordinaten, jede einzelne derselben eine Ordinate. Der Punct a^0 oder b^0, wo die Coordinaten sich in G^0 treffen, ist der Anfangspunct der Ordinaten und das Stück a^0b^0 von G^0, welches zwischen zwei solchen Anfangspuncten liegt, nennt man Abscisse zu diesen Ordinaten.

Auf den Grund der rechtwinklichen Beziehung der Linien und Ebenen bei gedachter Projectionstheorie hat man ihr die Benennung orthogonale Projection gegeben; sie ist dasselbe, was man unter „geometrischem Riß" versteht.*)

Unter „Durchschnitt (coupe)" versteht man die Projection eines Gegenstandes, wie ihn irgend eine schneidende Ebene bloßlegt, wobei sich, je nach der Lage dieser Ebene Längen-, Quer- und Horizontal-Durchschnitte (coupes longitudinales, latérales et horizontales) ergeben.

In der beschreibenden Geometrie nennt man auch die Projectionsaxe die Grundlinie (ligne de terre).

Denkt man die beiden Projectionsebenen unendlich verbreitert und rechtwinklich sich schneidend — welchen Begriff man nie aus den Augen verlieren sollte — wodurch im Raume sich vier Quadranten bilden (Viertel einer unbegrenzten Kugel) so

*) Weniger wissenschaftlich genommen, versteht man unter „Projection eines Gegenstandes" die graphische Darstellung desselben auf einer Fläche (die meistens eine Ebene ist), und dann wird, zumal bei technischen Zwecken, die Horizontalprojection der Grundriß, Plan (plan horizontal ou plan parterre), die Verticalprojection der Aufriß (élévation) genannt, und benutzt man noch eine dritte Projectionsebene G^3, welche auf den ersten beiden normal steht, so heißt die Projection auf dieser das Profil (profil).

entstehen noch andere Projectionen, je nachdem der Gegenstand in einem der vier Viertheile befindlich ist; man bezeichnet sie in practischem Sinne als obere, untere, vordere, hintere Ansicht.

Diese Begriffe werden sich in der Folge näher entwickeln*).

46) Bei der senkrechten, wie auch geneigten Stellung der Projectionsebenen, nimmt man immer die projicirenden Linien parallel mit derjenigen Ebene an, zu der sie nicht gehören.

Wenn man, mit Belassung der normalen Lage der Projectionsebenen, nur die Richtung der projicirenden Linien ändert, so wird die Projection des Gegenstandes von der vorhin erklärten verschieden sein, ohne je aufzuhören, zu den horizontalen und verticalen zu gehören; die Projection wird aus den rechtwinklichen in die schrägen Projectionen übergehen, deren in (20) und (31) gedacht ist. Als solche lassen sich auch die Schattenconstructionen betrachten. In dem Folgenden wird zuerst nur von den orthogonalen Projectionen gehandelt werden; es gelten jedoch die meisten der Sätze auch für Fälle, wo die Projectionsebenen einen Neigungswinkel α gegen einander bilden, andere unterliegen aber in solchen Fällen mehrern oder wenigern Modificationen. Auch sind die Sätze anwendbar, wenn eine Projectionsfläche nicht Ebene, vielleicht gewölbt, gebrochen, hohl oder erhaben ist, wenn auch oft nur mittelbar, so daß man die Projectionsebene als tangirend in dem zu projicirenden Puncte betrachtet.

---

*) Durchschnitte sind in vielen Fällen unentbehrlich, so bei Maschinen, architectonischen Rissen, geognostischen Zeichnungen u. a., um den Zweck, den Gegenstand durch Zeichnung in allen seinen Theilen deutlich zu machen, vollständig zu erreichen.

Bei ihnen hat man sich den vordern oder obern Theil durch die Ebene abgeschnitten und hinweg, das Innere dadurch dem Auge zugänglich zu denken.

47) Bei den orthogonalen Projectionen (Fig. 14.) bilden die Coordinaten mit den projicirenden Linien eines Punctes a ein Rechteck a $a^1 a^0 a^2$, welches aus der senkrechten Lage der Projectionsebenen und jener Linien folgt. Daher ist $aa^1 = a^0a^2$ und $aa^2 = a^0a^1$; oder es kann für die projicirende Linie eines Punctes a, welche sich auf G^1 bezieht, die Ordinate in G^2 und umgekehrt gesetzt werden.

48) Ist sonach ein Punct a^0 (auf der Axe G^0) gegeben, so ist dadurch zugleich eine Ebene gegeben, in welcher der Punct a liegt und seine Projectionen a^1 und a^2 mit.

49) Ist eine der Ordinaten gegeben, so ist durch sie die Ebene bestimmt, in welcher die Projectionen a^1 und a^2 und der Punct a selbst liegen.

50) Sind beide Ordinaten a^0a^1 und a^0a^2 gegeben, so ist dadurch nicht nur die Ebene, in welcher der Punct a im Raume liegt, sondern der Punct a selbst und jede seiner Projectionen a^1, a^2 vollkommen bestimmt.

51) Durch die beiden Projectionen a^1 und a^2 wird die Stelle, die der Punct a im Raume einnimmt, vollkommen bestimmt.*)

52) Diese Sätze verlieren an Geltung nichts:

a. wenn der Punct a in einer der Projectionsebenen (G^1) selbst liegt; dann fällt er mit seiner Projection a^1 zusammen, die Projection a^2 fällt in a^0 der Axe und die projicirende Linie aa^1, sowie die Ordinate a^0a^2 werden Null.

b. wenn der Punct a in beiden Projectionsebenen zugleich, also in der gemeinschaftlichen Linie G^0 liegt; seine Projectionen

*) Die Sätze 48, 49, 50, 51 folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Rechtecks (47), und wenn man dieses zur unendlichen Ebene verbreitert denkt.

a^1 und a^2 fallen dann beide in a^0 und die erste und zweite Ordinate und die projicirenden Linien werden Null.

53) Nimmt man an, die Ebenen G^1 und G^2 seien um die Axe G^0 Fig. 14 in eine Ebene aufgeklappt (Fig. 15.), so öffnet sich der rechte Winkel der Coordinaten zu einem gestreckten $a^1a^0a^2$, oder es geht die Verlängerung jeder Ordinate nach der andern Projectionsebene durch die Projection des Punctes a in dieser Ebene.*)

54) Wie Puncte im Raume stetig an einander gereihet gedacht werden können, so stetig werden auch die Projectionen jener Puncte an einander liegen und die Projection der Linie selbst bilden.

So deren horizontale und verticale Projection.

55) Die Lage einer Geraden, welche auf einer der Projectionsebene normal steht, ist bestimmt durch den Fußpunct der Verlängerung dieser Geraden in dieser Ebene; denn die Projection aller Einzelnpuncte fallen in einander und es ist dieser Punct die Projection aller, somit der Linie in der normalen Ebene.

56) Eine Gerade ab, deren Lage so ist, daß keine mögliche Ebene, die durch sie gedacht werden kann, normal der Axe ist, wird immer durch ihre beiden Projectionen bestimmt.

57) Eine Gerade in solcher Lage, die nicht normal auf einer der Projectionsebenen, aber so ist, daß sich durch die Linie eine Ebene denken läßt, die auf der Projectionsaxe normal steht, wird durch die beiden Projectionen nicht bestimmt. Denn es fallen die Projectionen aller Linien zusammen, welche in der gedachten normalen Ebene liegen können.

---

*) Diese aufgeklappte Lage der Projectionsebenen wird beim practischen Zeichnen angenommen und das sogenannte Abschieben aus einer der Projectionen nach der andern bezieht sich auf diesen Satz.

58) Ist die Linie eine begrenzte Gerade ab, dann reicht die Bestimmung der beiden Endpuncte a^1, b^1 und a^2, b^2 hin, die Projectionen der Linie selbst der Lage und Ausdehnung nach zu bestimmen; denn zwischen zwei Puncten ist nur eine Gerade möglich.

59) Eine Gerade, sie möge geneigt oder parallel einer der Projectionsebenen sein, hat zur Projection auf dieser Ebene wieder eine Gerade.

60) Steht eine Gerade normal auf einer Projectionsebene (G^1), dann ist deren Projection auf dieser Ebene der Durchschnittspunct der verlängerten Geraden in dieser Ebene (57). Die Projection auf der andern Ebene (G^2) steht normal auf der Axe und ist die Linie selbst. In keinem Falle können beide Projectionen zugleich Puncte sein.

61) Ist eine Gerade ab parallel einer Projectionsebene (G^1), so ist sie parallel ihrer Projection a^1b^1 in dieser Ebene, und ihre Projection a^2b^2 (in G^2) ist parallel der Axe.

Der letztere Zusatz fällt von selbst weg, wenn ab normal G^2.

62) Umgekehrt läuft die eine Projection a^1b^1 einer Geraden ab parallel der Axe, so läuft auch ab parallel G^2.

63) Sind beide Projectionen einer Linie ab parallel der Achse G^0, dann ist auch ab parallel G^0 und parallel a^1b^1 und a^2b^2.

64) Eine krumme Linie im Raume kann in dem Fall in beiden Projectionen eine Gerade bilden, wenn durch sie eine Ebene gelegt werden kann und diese auf beiden Projectionsebenen normal steht.

Die krumme Linie selbst wird in diesem Falle durch die Projectionen nicht bestimmt, weil eine undenkliche Menge Linien in der durchgelegten Ebene gedacht werden können, welche alle diese Projectionen gemein haben.

65) Eine krumme Linie wird zu der einen Projection (in G^2) eine Gerade, zu der andern (in G^1) eine krumme Linie haben, wenn die projicirenden Linien sämmtlicher Puncte (nach G^2) in einerlei Ebene liegen, die parallel G^1 ist, oder nur auf der einen Projectionsebene (G^2) normal ist.

66) Endlich sind beide Projectionen ebenfalls krumme Linien, wenn nicht sämmtliche Puncte der krummen Linie in einerlei Ebene liegen, oder wenn diese Ebene beide Projectionsebenen schräg schneidet.

Keine Projection einer krummen Linie kann je ein Punct sein.

67) Kann durch eine Linie ab im Raume, die weder auf G^1 noch G^2 normal steht, eine Ebene gedacht werden, die senkrecht der Axe ist, so stehen beide Projectionen der Linie normal der Axe und treffen sie in demselben Puncte.

68) Durchdringt eine Linie ab im Raume eine der Projectionsebenen (G^2) in einem Puncte c — welcher der Durchgang der Linie (durch G^2) genannt wird — so schneidet ihre Projection auf G^1 die Axe. Die Ebene aba^1b^1 auf G^1 bildet dann in G^2 einen Durchschnitt, der normal der Axe steht und ein Normalschnitt heißt.

69) Diejenigen Ebenen, aba^1b^1 oder aba^2b^2, die man durch eine Linie im Raume senkrecht auf die Projectionsebenen legt, nennt man projicirende Ebenen (Fig. 14.); man kann sie als stetige Aneinanderfügung der projicirenden Linien aller Puncte auf ab betrachten. Der Durchschnitt einer projicirenden Ebene mit G^1 oder G^2 ist daher die beziehliche Projection der Linie ab. Die projicirenden Flächen einer Geraden sind Ebenen.

70) Jede der projicirenden Ebenen einer Geraden ab, z. B. aba^1b^1 schneidet die andere der Projectionsebenen (G^2) stets in einer Geraden, die

normal der Axe und der andern Projectionsebene ist.

71) Läuft eine Gerade ab mit G^1 parallel, dann ist die zweite projicirende Ebene aba^2b^2 ebenfalls parallel G^1. Dasselbe ist bei Verwechselung der Projectionen geltend.

72) Liegt eine Linie ab in einer Projectionsebene (G^1), so ist sie eins mit ihrer Projection auf dieser Ebene, und deren projicirende Ebene auf G^1 ist Null.

73) Liegt die Linie in der Projectionsaxe G^0, so fällt sie mit ihren beiden Projectionen zusammen in die Axe und beide projicirende Ebenen sind Null.

74) Bei einer Linie (geraden oder krummen), deren eine projicirende Ebene normal auf beiden Projectionsebenen steht, fallen beide projicirende Ebenen in eine.

75) Allgemein genommen ist jede der projicirenden Ebenen ein Trapez, welches in bestimmten Fällen in ein Rechteck übergehen kann; und denkt man sich, für den Fall, (Fig. 16.) daß aa^1 größer als bb^1, durch b eine Normale bd auf aa^1, so ist stets

$$(ab)_q = (a^1b^1)_q + (aa^1 - bb^1)_q.$$

76) Schneiden sich zwei Linien ab und cd im Raume in e, und ist die Ebene, in welcher die schneidenden Linien liegen, nicht parallel einer Projectionsebene, so schneiden sich auch ihre Projectionen a^1b^1, c^1d^1 in der Projection e^1 von e, und a^2b^2, c^2d^2 in der Projection e^2.

77) Sind dagegen ab und cd parallel, so sind

a. deren Projectionen auf jeder der Ebenen parallel, wenn eine durch ab, cd gelegte Ebene nicht normal einer der Projectionsebenen ist.

b. Die Projectionen parallel auf G^2,

fallen aber auf G^1 zusammen, wenn die durchgelegte Ebene normal G^1 ist.

78) Sind die einen Projectionen (a^1b^1, c^1d^1) parallel, während die andern (a^2b^2, c^2d^2) sich schneiden, so ist auch ab nicht parallel cd und schneiden sich auch nicht, liegen also nicht in einer Ebene.

79) Schneiden sich a^1b^1, c^1d^1 in x^1 und a^2b^2, c^2d^2 in x^2, so schneiden die Linien selbst sich nur dann, wenn die Normalen aus x^1 und x^2 sich in einem Puncte der Axe treffen; wo nicht, so liegen die Linien ab, cd nicht in einer Ebene.

80) Der Punct des Durchganges einer Geraden in einer Projectionsebene ist stets derjenige Punct, in welchem die Projection und der Normalschnitt in dieser Projectionsebene sich schneiden.

81) Wie in der Geometrie eine Ebene ihrer Lage nach durch drei Puncte, die nicht in einer Linie liegen, vollkommen bestimmt wird, so geschieht dieses hier gleichmäßig durch die Projectionen dreier solcher Puncte.

82) Die Linien, in welcher eine Ebene A die Projectionsebenen schneidet, nennt man Schnitte, Grundschnitte (Spuren) (bases, traces) der Ebene A; den Schnitt auf G^1, den Horizontal- oder ersten Schnitt, bezeichnen wir durch S^1; den auf G^2, den Vertical- oder zweiten Schnitt, durch S^2, und so auf einer dritten Projectionsebene durch S^3.

Die Winkel, welche eine solche schneidende Ebene mit den Projectionsebenen G^1 oder G^2 macht (Neigungswinkel) heißen Grundwinkel.

83) Liegt eine Linie a in einer Ebene A, so liegt nothwendig deren Durchgangspunct (durch G^1) in dem Schnitt S^1 der Ebene A.

84) Bildet eine Ebene A nur einen Grundschnitt, z. B. in G^1, so läuft sie parallel mit der

andern Projectionsebene G^2 und der Schnitt liegt parallel der Are G^0; und so auch umgekehrt.

Anmerkung. Man lasse nicht außer Acht, daß sowohl die Projectionsebenen, wie auch die schneidenden Ebenen und so auch die Schnitte, allgemein betrachtet, stets unbegrenzt gedacht werden müssen.

85) Steht einer der Grundschnitte normal der Are G^0, also auch normal G^1 (oder G^2), so steht auch die Ebene A normal G^1 (oder G^2).

86) Schneidet eine Ebene A beide Projectionsebenen, so vermögen die Schnitte unter folgenden Bedingungen die Lage der Ebene A vollkommen zu bestimmen:

a. wenn die Schnitte parallel der Are sind; denn durch zwei parallele Linien kann nur eine Ebene gelegt werden;

b. wenn die Schnitte in beiden Projectionsebenen in einem Puncte der Are sich treffen;

c. wenn beide Schnitte in die Are fallen und noch der Schnitt in einer dritten Projectionsebene G^3 gegeben ist;

d. und kennt man von einer Ebene B nur einen der Grundschnitte S^1, so ist es hinreichend, von dem andern Schnitt S^2 nur einen Punct zu kennen, um den Schnitt S^2 selbst zu haben.

87) Steht eine Linie ab im Raume auf einer Ebene im Raume senkrecht, so steht auch deren erste Projection a^1b^1 auf dem ersten Schnitt senkrecht, und auch die zweite Projection wird auf dem zweiten Schnitt S^2 senkrecht stehen; und so umgekehrt.

88) Ist eine Ebene parallel der Are, dann ist auch jeder ihrer Schnitte der Are parallel.

89) Steht eine Ebene normal der Axe, so sind ihre Schnitte ebenfalls der Axe normal.*)

90) Schneiden sich zwei Ebenen in einer Linie im Raume die parallel einer Projectionsebene ist, so sind die Schnitte in dieser Ebene parallel.

91) Schneiden sich zwei Ebenen und schneidet ihre Durchschnittslinie eine der Projectionsebenen, so schneiden sich auch die Schnitte der Ebene in dieser Ebene, und zwar in dem Durchgangspunct der Durchschnittslinie.

92) Sind daher von zwei Ebenen A und B die Schnitte auf G^1 parallel, während die auf G^2 sich schneiden, so schneiden sich die Ebenen A und B, und zwar in einer Linie, die mit den ersten Schnitten parallel ist, aber durch den Durchschnittspunct der zweiten Schnitte hindurchgeht.

93) Schneiden sich die ersten und zweiten Grundschnitte paarweise in den beziehlichen Projectionsebenen G^1 und G^2, so schneiden sich auch die Ebenen A und B, und zwar in einer Linie, welche die gedachten Durchschnittspuncte verbindet.

Es wird sonach durch die Durchschnittspuncte der Grundschnitte in G^1 und G^2 die Richtung der Durchschnittslinie der Ebenen bestimmt.

94) In der Projection einer krummen Linie liegen die Projectionen ihrer sämmtlichen Puncte.

95) Berühren sich daher eine Curve von einfacher Krümmung und eine Gerade, so berühren sich auch die Projectionen dieser Linien in der Projection des Berührungspunctes; oder es berühren sich die Projectionen in der einen Projectionsebene und die in der andern fallen in einander; oder es

*) Der Fall umgekehrt findet nicht unbedingt statt.

fallen die Projectionen in jeder von den Projectionsebenen in einander.

Der erste Fall tritt ein, wenn die Ebene, in welcher die Curve und die Gerade liegen, schräg steht auf beiden Projectionsebenen.

Der zweite Fall tritt ein, wenn die Ebene, worin beide Linien liegen, nur auf einer der Ebenen normal steht.

Der dritte Fall zeigt sich, wenn die gedachte Ebene normal der Axe steht.

96. — Berühren sich eine Curve von doppelter Krümmung und eine Gerade, so sind die Projectionen der Geraden Tangenten für die Projectionen der Krümmungen. Umgekehrt läßt sich nicht unbedingt aus der Berührung der Projectionen auf die Berührung der Curve und der Geraden im Raume zurückschließen.

Sie berühren sich im Raume, wenn die Normalen, die man aus den Berührungspuncten der Projectionen auf die Axe fällt, sich in demselben Puncte der Axe treffen und die Projectionen der Geraden nicht auf der Axe normal stehen.

Sie berühren sich nicht im Raume, wenn die Projectionen der Geraden auf der Axe senkrecht stehen und die Gerade und Curve sich nicht in einer dritten Projection tangiren.

97. — Schneiden sich eine krumme Linie und eine Gerade, so schneiden sich auch ihre Projectionen, wenn nicht beide in einer Ebene liegen, welche auf einer Projectionsebene normal steht. Denn in diesem Falle decken sich die Projectionen in dem Schnitte dieser Ebene. Für den umgekehrten Schluß von den Projectionen auf die Linien im Raume finden die Bedingungen (96) statt.

98. — Ein Gleiches gilt für die Berührung zweier Curven und das Schneiden zweier Curven.

99. — Berühren sich die Projectionen zweier Curven, treffen die Normalen, von den Berührungspuncten auf die Axe gefällt, sich auf derselben in einem Puncte und stehen die gemeinschaftlichen Tangenten, welche die Projectionen in den Berührungspuncten haben, auf der Axe normal, so kann nur eine dritte Projection entscheiden, ob sich die Curven schneiden oder berühren.*)

*) Wird in dem Folgenden Beziehung auf einen der §§. dieser Elemente genommen, so geschieht es durch Einschluß der Nummer des §. in ( ). Dagegen wird, bei Anführung eines der folgenden §§. dies Zeichen der Nummer vorgesetzt werden.

Erste Abtheilung.

Die beschreibende Geometrie (Geometrie descriptive).

Erster Abschnitt.

Allgemeine Erläuterungen.

1. — Die Wissenschaft, welche die Projectionen von Raumgrößen durch Zeichnung in einer Ebene, Zeichnenebene, finden lehrt, und umgekehrt in den Stand setzt, aus den gegebenen Projectionen (Zeichnungen) Raumgrößen zu bilden, heißt die beschreibende Geometrie*).

---

*) Es sind nur wenig Decennien verflossen, seit man in Deutschland angefangen hat, dieser Wissenschaft die gebührende Aufmerksamkeit zu schenken. Die Franzosen waren die ersten, welche die vorhandenen Fragmente sammelten, und namentlich war es Monge welcher sie zu einem systematischen Ganzen ordnete und damit den Grund zu einer Wissenschaft legte, der er den Namen „Géométrie descriptive" gab.

Von da ab übernahmen Lacroix, Potier, Hachette, Dupin, Le Blanc u. A. deren weitere Ausbildung, und jetzt ist sie in Frankreich ein wesentlicher Gegenstand des öffentlichen Unterrichts, dem die Nation die überwiegende Ausbil=

2.—Um nach Zeichnungen Raumgebilde schaffen zu können, müssen constante Beziehungen gegeben sein; es müssen die Raumgrößen vollständig repräsentirt sein, in einer Weise, die alle Operationen mit Raumgrößen gestattet. Das Mittel zu einer solchen Repräsentation wird bei Puncten und Linien in den Projectionen (45), bei Flächen in ihren Grundschnitten (82) gefunden. Die Constructionen der

---

dung ihrer technischen Arbeitskräfte, die sichtliche Erhebung ihrer Industrie über die anderer Nationen, selbst der englischen, verdankt. In Deutschland besitzen wir nur wenig Schriften über die beschreibende Geometrie, die als Originalwerke gelten können. Das umfassendste ist „die beschreibende Geometrie und ihre Anwendungen von Professor F. Wolff in Berlin 1835, 2 Bände. Es ist rein wissenschaftlich gehalten, tritt mit einer achtungswerthen Selbstständigkeit auf, bahnt sehr zweckmäßig den Weg zum Practischen an, führt aber nicht eigentlich in die Praxis ein, wie sie dem practischen Zeichner noth thut.

Dieses Werk kann daher bei dem Techniker den Eingang nicht in dem Maße finden, wie es verdient. Bei dem gewöhnlichen Techniker fehlt theils noch die weitgedehnte wissenschaftliche Vorbildung, die der Einbildungskraft unter die Arme greifen muß, wenn er das Buch verstehen will; theils findet sich bei dieser Klasse leider immer noch eine tief gewurzelte Abneigung gegen alles gründliche Studium, welches auch auf ein zu weit getriebenes Geizen mit der Zeit begründet ist.

Ein anderes nah verwandtes Werk ist „darstellende Geometrie von J. Adhemar, nach dem Französischen bearbeitet von O. Möllinger, Prof. in Solothurn. Auch dieses geht sehr wenig ins Practische ein, fordert noch mehr als das vorhergenannte die eigene Thätigkeit des Geistes auf und ist zu kostbar. Andere beziehliche Schriften sind: „Elemente der Projectionslehre, von v. Bünau", dessen „Lehrbuch der descriptiven Geometrie" nach dem Französischen von Lefebure de Fourcy", Mossbrugger Aufgaben aus dem Gebiete der Géométr. descript., demnächst mehrere französische und englische Werke.

beschreibenden Geometrie haben hauptsächlich ein technisches Interesse.

3. — Bei technischen Anwendungen ist es am vortheilhaftesten, die eine der Projectionsebenen (44) in horizontaler, also die andere in verticaler Lage anzunehmen: die projicirenden Linien (45) auf die Horizontalebene werden nämlich sehr einfach durch das Senkloth erhalten, und da (47) die Ordinate in der Verticalebene gleich ist der projicirenden Linie zu der Horizontalebene, so lassen sich aus der Horizontalprojection und den dazugehörigen projicirenden Linien leicht die Projection in der Verticalebene, und umgekehrt, finden. Eben so leicht lassen sich aus den gegebenen Projectionen und den beziehlichen Linien Raumgebilde herstellen. Das Eine braucht der Zeichner, um sich dem Werkmann verständlich zu machen, das Andere dient dem Arbeiter bei Ausführung einer technischen Arbeit.

4. — In der Technik braucht man öfters die Benennungen Grundriß für die horizontale und Aufriß für die verticale Projection (45 Anmerk. 1); demnächst obere, untere, vordere, hintere, Seiten-Ansicht. Es sind dieses Ausdrücke, die in der Lage der Projectionsebenen gegen den projicirten Gegenstand begründet sind, die aber hier nur selten gebraucht werden, und dann mehr, wenn von ausgeführten technischen Dingen die Rede sein wird.

5. — Bei technischen Zeichnungen hat man immer auf einer Ebene, dem Zeichenbret, zu projiciren. Dies kann nicht anders geschehen, als wenn wir uns eine der beiden Projectionsebenen so niedergeklappt denken, daß sie in die Verlängerung der anderen zu liegen kommt (53). Die Linie, um welche diese Drehung gedacht wird, ist die Projectionsaxe G^o (44); sie ist bei den projicirenden Operationen unentbehrlich und kann nur bei ausgeführten

Zeichnungen weggelassen werden, wenn die zeichnenden Operationen ihrer nicht mehr bedürfen.

Dagegen stellt man immer die verschiedenen Projectionen auf einem größeren Risse so viel als möglich dergestalt über und neben einander, wie sie sich bei dem Projiciren in gegenseitiger Beziehung ergeben. Das Erkennen der wechselseitigen Abstammung wird sehr erleichtert und das Verständniß befördert, wenn man die einzelnen Theile durch projicirende Linien in Beziehung oder Verbindung setzen kann.

Das Profil bezieht sich gewöhnlich auf eine dritte Projectionsebene; wir können uns ihre Drehungsaxe mit der horizontalen oder mit der verticalen in Gemeinschaft denken; im ersten Falle erhält das Profil eine liegende, im zweiten Fall eine stehende Lage. Letztere Stellung ist die gewöhnlichere.

6. — Behalten wir den Begriff einer unendlichen Verbreiterung der beiden Projectionsebenen im Auge, so wird durch sie der unbegrenzte Raum nach vier Richtungen getheilt. Die Stellung des Auges gegen diese beiden schneidenden Ebenen wird in den meisten Fällen so angenommen, daß es die erste (horizontale) Projectionsebene von oben, die zweite (verticale) Ebene von vorn betrachtet. In Bezug auf die gedachten vier Quadranten müssen die (44) gegebenen Bezeichnungen erweitert werden. Bezeichneten wir die obere und vordere Seite der ersten Projectionsebene (Fig. 18) durch G^1, die obere und vordere Seite der zweiten Projectionsebene durch G^2, so kommt noch das Zeichen G_1 für die obere und hintere Abtheilung der ersten und G_2 für die vordere und untere der zweiten hinzu. Wird noch auf eine dritte Projectionsebene Bezug genommen, so vermehren sich die Bezeichnungen noch um zwei, und dann bedeutet G^3 den Theil dieser dritten Ebene,

welcher über der Horizontalebene, und G_3 den Theil derselben, welcher unter der Horizontalebene liegt.

In Figur 17 sind sämmtliche Abtheilungen des Raumes, welche durch drei gegenseitig senkrechte Projectionsebenen gebildet werden, zusammengestellt. Wir sehen hier zugleich die Bezeichnungsart der Durchschnittslinien oder Axen und die Bezeichnung der Projectionen eines Punctes a auf den beziehlichen Abtheilungen der Ebene.

Es schneiden sich nämlich G^2 und G_2 mit G^1 und G_1, in G^0, G^3 und G_3 mit G^1 und G_1 in G^-, und G^3 und G_3 mit G^2 und G_2 in $G^=$. Die Projectionen des Punctes a erhalten dasselbe Beizeichen, welches den Ebenen zukommt, auf denen sie liegen, wie man in der Figur sieht. In Fig. 18 und 19 sind die vier verschiedenen Stellungen, die ein Punct a im Raume gegen die beiden ersten Projectionsebenen annehmen kann, und die beziehende Bezeichnung der Projectionen speciell angegeben. Am meisten kommen die Beziehungen auf G^1 und G^2, demnächst die auf G^3 vor. Man würde die übrigen Beziehungen ganz entbehren können, weil jede der anderen auf die erstere zurückgeführt werden kann, wenn nicht die mathematische Bestimmtheit sie verlangte. Uebrigens sieht man, daß die verschiedenen Lagen sich immer auf die Annahme der Axe (Grundlinie) beziehen.

Zweiter Abschnitt.

Projection der Puncte und Linien.

7. — **Aufgabe.** Die Projectionen eines Punctes a zu finden.

Die erste und zweite Projection des Punctes liegt (47) in den Ecken des Rechtecks*), welches die Coordinaten mit den projicirenden Linien bilden. Man erhält sonach (Fig. 17) in allen Projectionsebenen die Projectionen eines Punctes a in den Durchgangspuncten (Fußpuncten) a^1, a^2, a^3 ꝛc. der Senkrechten, die man aus a auf die Projectionsebenen G^1, G^2, G^3 ꝛc. fällt. Umgekehrt liegt der Punct a im Raum in den Durchschnitten der Normalen, die man in dessen Projectionen auf den Projectionsebenen errichtet. Auf der Zeichnenebene können wir nicht mit Körper und Flächenwinkeln operiren, wir haben nur die in einerlei Ebene um die Axe herabgeklappten Projectionsebenen (5). Betrachten wir Fig. 14 als plastische Darstellung des Flächenwinkels, so gestaltet er sich nach dem Niederlegen wie Fig. 15. Bei der Drehung wird sich der Punct a und a^1 in der senkrechten projicirenden Ebene $a^0 a^2 a a^1$ bewegen, der rechte Winkel $a^2 a^0 a^1$ also sich zu einem gestreckten erweitern, d. i. seine Schenkel werden eine Gerade bilden, wie $a^2 a^0 a^1$ Fig. 15 (53). Kennt man daher die Länge der projicirenden Linien, d. i. den geometrischen Abstand des Punctes a im Raum von den Projectionsebenen, zieht $a^1 a^2$ Fig. 15 normal der Axe, macht $a^0 a^1$ gleich dem Abstand a G^2 und $a^0 a^2$ gleich dem Abstand a von G^1, so sind a^1 und a^2 die Projection des Punctes a auf der Zeichnung.

*) Wir nehmen von jetzt ab die Projectionsebenen stets senkrecht gegen einander an.

Aus der Eigenschaft des Rechtecks folgt beiläufig, daß die erste Projection eines Punctes dieselbe bleiben wird, wenn der Punct nur seinen Abstand von der ersten Projectionsebene verändert, während die zweite Projection dadurch eine andere wird und umgekehrt.

8. — **Aufgabe.** Die Projection eines Punctes a auf einer dritten Projectionsebene zu finden, wenn die beiden ersten Projectionen a^1 und a^2 gegeben sind.

Man nehme an, die Projectionsebene G^2 sei um die Axe G^0 in eine Ebene mit G^1 zurückgeschlagen, das Gleiche sei mit der Ebene G^3 um die Axe $G^=$ geschehen; es liegen also alle drei Projectionsebenen in der Zeichnenebene.

Man ziehe aus a^1 die Normale $a^1 a^3$ auf $G^=$, womit $a^=$ der Anfangspunct der Ordinaten für die Axe $G^=$ wird.

Da nun die Ordinate $a^= a^3$ in der Projectionsebene G^3 gleich der projicirenden Linie zu G^1, und diese projicirende Linie gleich der Ordinate $a^0 a^2$ in der Ebene G^2 ist: so mache man die Verlängerung $a^= a^3$ gleich $a^0 a^2$, dann ist a^3 die verlangte dritte Projection des Punctes a. Man sieht, daß auch hier die beiden Projectionen a^1 und a^3 auf einer Geraden liegen, die auf der Axe $G^=$ senkrecht steht.

Die Auflösung ändert sich nicht, wenn, obige Bedingungen beibehalten, der Punct a in irgend einem andern Quadranten (Fig. 17) liegt. In Figur 21 befindet sich der Punct a wie in Fig. 19 in dem Raum unter der Horizontalebene und vor der Verticalebene. Die punctirten Linien $a^0 a^2$ und $a^= a^1$ fallen zum Theil mit den ausgezogenen $a^0 a^1$ und $a^= a^1$ zusammen.

9. — **Aufgabe.** Aus den drei Projectionen a^1, a^2, a^3 den Punct a im Raume selbst zu bestimmen.

Man wird sich aus dem Vorhergehenden überzeugt haben, daß die Normalen, die man in den drei Projectionen des Punctes auf den Ebenen errichtet, sich in einem Puncte, dem Punct a, im Raum schneiden müssen. Es genügen in der Regel schon zwei der Projectionen; die dritte ist jedoch oft willkommen, um als Controle zu dienen.

Gesetzt, der zu bestimmende Punct a läge in dem Inneren eines Würfels, auf dessen Seiten die Projectionen a_1 und a_2 verzeichnet sind. Man hat hier die Lage Fig. 18 rechts. Denkt man sich die materielle Ausführung und bohrt in a_2 senkrecht so tief ein, als die Länge der Ordinate $a^0 a_1$ beträgt, so hat man den Punct a im Innern erreicht. Er wird ebenfalls gefunden in dem Zusammenteffen zweier senkrechten Bohrlöcher a_1 und a_2 und als vollkommen genau erkannt, wenn auch das dritte Bohrloch a^3 in einem Puncte mit den beiden ersten zusammentrifft*).

10. — **Aufgabe.** Die wahre Entfernung zweier Puncte a und b aus ihren Projectionen zu bestimmen.

Sind G^1 und G^2 die beiden in eine Ebene gelegten Projectionsebenen, a^1, b^1 und a^2, b^2 die beiden gegebenen Projectionen der Puncte a und b, so bilden die Linien ab, a^1b^1 mit den projicirenden Linien aa^1 und bb^1 ein bei a^1 und b^1 rechtwinkliches Trapez; statt der Linien aa^1 und bb^1

*) Diese Aufgabe wird häufig empirisch gelös't, wenn der Techniker nach einer Zeichnung ein Material zurichtet; am augenfälligsten vom Bildhauer, wenn er mittelst der Mensur einen Punct in dem Inneren seines Blockes bestimmen will

können aber die gleichen Ordenaten $a^2 a^0$ und $b^2 b^0$ einstehen.

Man errichte daher $a^1 \alpha = a^2 a^0$ und $b^1 \beta = d^2 b^0$ normal in $a^1 b^1$ und ziehe $\alpha\beta$, so ist letztere Linie die geometrische Entfernung a von b im Raum.

Oder: man ziehe $\alpha\gamma$ parallel $a^1 b^1$, wodurch $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ($=a^1 b^1$) und $\beta\gamma$ ($=b^2 b^0 - a^2 a^0 = b^2 \delta$) ein rechtwinkliches Dreieck bilden*). Man braucht daher nur $a^2 \varepsilon$ mit der Axe parallel zu ziehen, die Linie $\delta\varepsilon$ gleich $a^1 b^1$ zu machen und b^2, ε zu verbinden, um in der Linie $b^2 \varepsilon$ ebenfalls den geometrischen Abstand der Puncte a und b im Raum zu erhalten.

11. — **Aufgabe.** Es soll umgekehrt die Projection eines Punctes c bestimmt werden, wenn auf der Linie ab im Raum eine bestimmte Länge $ac = m$ von a nach c aufgetragen werden soll.

Hat man nach der vorigen Aufgabe die geometrische Länge von ab in $\alpha\beta$ gefunden, so trage man das Maß m nach μ, ziehe μc^1 normal $a^1 b^1$ und dann $c^1 c^0$ normal der Axe G^0, bis sie $a^2 b^2$ trifft. Es sind dann c^1 und c^2 die Projectionen des Punctes c oder die der gegebenen Linie ac**).

12. — **Aufgabe.** Die Projectionen einer Geraden ab zu finden, welche parallel beiden Projectionsebenen ist (Fig. 24, 25).

Aus der Reliefffigur 24 wird klar, daß durch die Projicirung der Endpuncte die Projectionen der Linie selbst gefunden sind (58). Wegen der parallelen Lage zu beiden Projectionsebenen, folglich auch zu

*) Wenn $a^2 \delta$ parallel der Axe gezogen ist.

**) Bei dieser Operation ergiebt sich zugleich der Neigungswinkel (Grundwinkel), den die Linie ab im Raum mit der ersten Projectionsebene macht (82). Da dieser Winkel derselbe ist, den ab mit $a^1 b^1$ eingeht, so ist er gleich dem Winkel $\beta\alpha\gamma$.

der Axe G'' (61), ist $aa^1 = bb^1 = a^2a^0 = b^2b^0$, sowie $aa^2 = bb^2 = a^1a^0 = b^1b^0$ und beide Projectionen sind der Linie ab im Raum gleich.

Ist sonach Fig. 25 das Zeichnenblatt mit den niedergeklappten Projectionsebenen, zieht man die Grundlinie beliebig und mit ihr normal b^2b^1; macht ferner b^2b'' gleich $a^0a^2 = aa^1$, zieht die Parallelen b^2a^2, b^1a^1 und macht sie gleich der gegebenen ab, so sind diese die verlangten Projectionen*).

13. — Um diese Operation einer Linie anzupassen, welche keiner der Projectionsebenen parallel ist, löse man folgende

Aufgabe. Die Projectionen einer Linie ab zu finden, welche gegen jede der Projectionsebenen geneigt ist.

(Fig. 26, 27.) Fig. 26 gewährt eine Raumanschauung der Aufgabe und Fig. 27 zeigt die Operation auf der Zeichnenebene, die abermals im Wesentlichen darin besteht, die Endpuncte a, b auf beiden Projectionsebenen zu projiciren, oder die Schnitte (82) der projicirenden Ebenen aba^1b^1 und aba^2b^2 zu bestimmen, welche diese Puncte und die Linien selbst in den Projectionen vertreten.

Man hat dazu die Kenntniß der Normalen $bb^1 = b^2b^0$, $aa^1 = a^2a^0$, wie auch die Normalen $bb^2 = b^0b^1$ und $aa^2 = a^1a^0$ nöthig, welche durch Ablothen und Messen bestimmt werden müssen. Ferner ist die Abseisse a^0b^0 zu suchen. (Fig. 23.) Zu diesem Zweck construire man einen rechten Winkel $a^1b^1\beta$, mache $b\beta = b^1b = b^2b^0$ und $b^1\gamma = a^1a = a^2a^0$, ziehe $\alpha\gamma$ parallel a^1b^1, schneide mit dem Radius $=$ ab aus β

*) In dieser Aufgabe liegt die Manipulation des Streichmaßes bei dem Tischler, das rechtwinkliche Abrichten eines Holzstückes, Steines u. dergl.

diese Parallele in α und ziehe aus α die Normale αa^1 auf $a^1 b^1$. Hierauf beschreibe man mit dem Radius $aa^2 = a^1 a^0$ aus b^1 einen Kreisbogen, einen andern aus a^1 mit dem Radius $bb^2 = b^1 b^0$ und lege an diese eine Tangente $a^0 b^0$, welche die gesuchte Linie ist.

Ist $a^0 b^0$ gefunden, (Fig. 27.) so trage man sie auf G^0, ziehe normal der Axe $a^0 a^2$, $b^0 b^2$, mache $a^0 a^2 = a^1 a$, $b^0 b^2 = b^1 b$, ebenso die Verlängerungen $a^0 a^1 = a^2 a$, $b^0 b^1 = b^2 b$, dann sind $a^1 b^1$ und $a^2 b^2$ die verlangten Projectionen*).

14. — **Aufgabe.** Man soll durch einen gegebenen Punct a, (Fig. 28.) dessen Projectionen in a^1 und a^2 bestimmt sind, eine Parallele mit einer gegebenen Richtung ziehen und projiciren.

Da die projicirende Ebene einer Geraden nothwendig diese Linie selbst, sowie alle Normalen enthält, welche aus Puncten derselben auf die Projectionsebene gefällt werden können, so reicht die gegebene Linie und eine dieser Normalen hin, um die Lage der projicirenden Ebene zu bestimmen. Sind aber zwei Linien im Raume parallel, so sind es auch ihre Projectionen (61).

Wenn daher E^1 und E^2 die Projectionen der gegebenen Linie oder die Schnitte der projicirenden Ebenen sind, so ziehe man durch a^1 und a^2 Parallelen mit E^1 und E^2, wodurch die Parallelen in ihren Projectionen gefunden sind.

---

*) Zu dem Ablothen bedient man sich bei größern Dimensionen des Bleilothes, bei geringern rechtwinklicher Dreiecke, die man mit einer Kathete auf die Horizontalebene auffetzt. Zuweilen gestatten Kanten ein unmittelbares Messen. Die vorstehende Auflösung ist mehr auf das praktische Zeichnen gerichtet.

15. — Zwei Linien schneiden sich nur dann im Raum, wenn die Verbindungslinie der beiden Projectionen ihres Durchschnittspunctes normal auf der Projectionsaxe steht, (79).

16. — **Aufgabe.** Die Durchgänge einer gegebenen Linie ab zu construiren, wenn deren Projectionen gegeben sind (68).

Dabei können folgende Voraussetzungen statt haben:

a) die eine Projection (a^1b^1) sei parallel der Axe, die andere (a^2b^2) schneide die Axe.

Die Linie ab (Fig. 29) ist in diesem Fall parallel der Projectionsebene G^2 (62) und schneidet G^1.

Den Durchgang von ab in G^1 zu erhalten, verlängere man a^2b^2 bis zum Zusammentreffen mit der Axe in a^0 und fälle aus a^0 die Normale a^0c; wo diese (der Normalschnitt) in der ersten Projectionsebene die erste Projection oder deren Verlängerung in c schneidet, ist der gesuchte Durchgang (80).

b) Beide Projectionen von ab schneiden die Axe (Fig. 30 und 31); es schneidet dann die Linie beide Projectionsebenen.

Man verlängere jede Projection bis zur Axe und construire die beiden Normalschnitte cd, ef. Es sind dann die Puncte F und d, wo die gedachten Normalschnitte die Richtungen der Projectionen schneiden, die Durchgänge durch die Projectionsebenen.

c) In dem Fall, daß beide Projectionen der Linie ab normal der Axe sind, muß noch eine dritte Projectionsebene herbeigezogen werden, ohne welche die Durchgänge nicht bestimmt werden können. Deren Axe, welche diese mit der ersten Projectionsebene gemein hat, ist in der Figur durch G^- bezeichnet.

Man construire nach §. 8 zuerst die dritte

Projection a^3b^3, verlängere a^3b^3 bis zur Axe G^- in c und zeichne den Normalschnitt cd. Der Punct des Durchschnitts d, wo der Normalschnitt und die Richtung der ersten Projection sich treffen, ist der Durchgang von ab in der ersten Projectionsebene.

Ferner verlängere man die dritte Projection a^3b^3 bis zum Durchschnitt e mit der Axe $G^=$ *). Construirte man aus e in der zweiten Projectionsebene den Normalschnitt der dritten projicirenden Ebene, so würde sich der zweite Durchgang in dem Durchschnitt dieses Normalschnitts mit der Richtung der zweiten Projection ergeben. Der erwähnte Normalschnitt ist parallel der Axe G^0, und dessen Abstand von der Axe ist gleich ex.

Man findet daher den zweiten Durchgang F, indem man hf = ex nimmt.

17. — **Aufgabe.** Die andere Projection einer Linie, die in einer Ebene liegt, zu finden, wenn die Schnitte dieser Ebene und die eine Projection der Linie gegeben sind.

Es sei die zweite Projection a^2b^2 der Linie ab und die Schnitte E′ und E″ gegeben. Man verlängere a^2b^2, bis sie den Schnitt E″ in m trifft und die Axe G^0 in n schneidet; ziehe durch m und n die Normalen no und mp mit der Axe G^0 und verbinde op, so ist diese Verbindungslinie die erste Projection der Linie ab.

Man kann sich Ueberzeugung von der Genauigkeit der Construction verschaffen, wenn man aus einem beliebigen Punct n″ der zweiten Projection eine Linie n″ n′ normal der Axe auf die erste Projection zieht, durch n″ die Linie $d''c^2$ parallel E″,

*) Die Axe $G^=$, welche der zweiten und dritten Projectionsebene gemein ist, fällt in die Richtung der Axe G^0.

aus c^2 die Normale nach c' auf E' und zuletzt $c'\,d'$ parallel der Axe zieht.

Schneidet diese Parallele die erste Projection in n', so ist richtig operirt worden. Diese Untersuchung ist, zumal bei verwickeltern Aufgaben, immer anzurathen.

18. — **Aufgabe**. Will man daher eine Linie in beiden Projectionen so zeichnen, daß sie in einer gegebenen Ebene liegen soll, (welche durch ihre Schnitte nach (86) bestimmt ist) so muß man die Projectionen der Linie so construiren, daß die Durchgänge der Geraden in den Schnitten der Ebene liegen; oder allgemeiner: daß irgend zwei Puncte der Geraden in die Ebene fallen.

19. — **Aufgabe**. Es ist eine Linie ab gegeben, welche eine Ebene E schneidet, man soll den Durchschnittspunct n projiciren.

Man construire die Schnitte der einen projicirenden Ebene, etwa abG' (indem jede Ebene welche man durch ab im Raum legt, die Ebene E in einer Linie cd schneidet, deren Durchschnittspunct mit ab der Punct n ist; eine solche Ebene ist aber jede projicirende Ebene der Linie ab). Der erste Schnitt ist die Projection $a'\,b'$, der zweite der Normalschnitt.

Dann construire man die Durchschnittslinie cd der Ebenen abG' und E. Die Puncte c^1 und d^2, in welchen die Schnitte dieser Ebenen sich schneiden, sind die Durchgänge; c^1c^2 ist der Normalschnitt in der ersten Projectionsebene, also c^2d^2 die zweite Projection. Der Normalschnitt d^2d^1 in G^2 und die Projection d^1c^1 in G^1 fallen beziehlich mit dem Normalschnitt und der Projection von ab zusammen.

Hierauf bestimme man den Durchschnittspunct n von ab und cd. Die zweite Projection desselben ist n^2, in welcher die zweiten Projectionen der Linien

sich schneiden; die erste ergibt sich, wenn man die Normale n^2n^0 verlängert, in dem Durchschnitt n^1 der Normale mit der Projection a^1b^1. Es sind dann die Puncte n^1 und n^2 die Projectionen des Durchganges von ab in der Ebene E.

20. — **Aufgabe.** Man soll die Durchschnittslinie zweier Ebenen finden, deren Schnitte gegeben sind (Fig. 35.).

Man fälle aus dem Durchschnittspunct der beiden Schnitte E^1 und F^1, E^2 und F^2 Normalen a^1a^2, b^1b^2 auf die Axe.

Verbindet man den Fußpunct a^2 mit dem Durchschnitt b^2, so erhält man in a^2b^2 die verticale Projection und in der Verbindungslinie a^1b^1 die horizontale Projection der verlangten Linie des Durchschnittes.

Man untersucht die Richtigkeit der Operation, wenn man aus einem beliebigen Punct n'' eine Linie normal der Axe auf den ersten Durchschnitt in n^1 fällt, die Horizontale oc^1, die Senkrechten c^1c^2 und on, dann die Parallelen durch n und c^2 zieht; letztere müssen in dem Punct n'' zusammentreffen.

Da diese Aufgabe eine von denen ist, die sehr häufig in Anwendung kommen, so sind in den folgenden Figuren die gewöhnlichern Fälle zusammengestellt worden.

In Figur 36 schneiden sich die Schnitte auf der ersten Projectionsebene hinter der zweiten Projectionsebene.

In Figur 37 fällt die horizontale Projection der Durchschnittslinie mit dem ersten Schnitt der einen Ebene zusammen. Dies tritt ein, wenn diese Ebene auf G^1 normal steht, wo sie dann zugleich projicirende Ebene der Durchschnittslinie ist.

In Figru 38 ist die Ebene E parallel der ersten Projectionsebene. Dann folgt, daß die

Durchschnittslinie der Ebenen mit dem Schnitt der andern Ebene parallel sein muß.

In diesem Falle liegt der Durchschnittspunct (h′ h″) in unendlicher Ferne.

Dasselbe zeigt sich in den Figuren 39 und 40. In dem letzten Falle sind beide Ebenen der Axe parallel, daher auch ihr Schnitt (s^1, s^2), dessen Schnitt in der dritten Projectionsebene durch den Punct s^3 bezeichnet ist, mit der Axe parallel sein muß.

21. — Liegen die gegebenen Ebenen **F** und **E** so, daß die vier Puncte a^1, a^2, b^1, b^2 Figur 35, welche zu Bestimmung der Projectionen der Durchschnittslinie dienten, in einem Punct **m** auf G^0 zusammenfallen, so muß ein anderes Verfahren angewandt werden. Dieser Punct **m** ist beiden Ebenen gemeinschaftlich, es müssen also auch die Projectionen der Durchschnittslinie in ihm zusammentreffen, weshalb man zu jeder noch einen Punct zu bestimmen hat, um die Richtung der Projectionen zu finden.

Zu diesem Zweck lege man möglichst entfernt von der Ebene **F** eine ihr parallele Ebene **E‴ E³** und suche die Durchschnittslinie t′ t″ der Ebenen **E** und **E³** nach §. 20.

Da nun diese Linie mit dem gesuchten Durchschnitt parallel sein muß, indem die parallelen Ebenen **F** und **E‴ E³** von der dritten Ebene **E** nur nach parallelen Linien geschnitten werden können, so hat man durch **m** die Parallelen **ms′** und **ms″** mit t′ und t″ zu ziehen, um in ihnen die gesuchten Projectionen des Durchschnitts der Ebene **F** und **E** zu erlangen.

Dasselbe Verfahren wendet man an, wenn die vier Puncte a^1 a^2, b^1 b^2 zu eng zusammenliegen und dadurch die Richtung der Durchschnittslinie unverläßlich wird.

22. — Fällt einer der Durchschnittspuncte der Grundschnitte über die Zeichnenebene hinaus, dann construirt man folgendermaßen:

Es seien die Ebenen E^1 und E^2 gegeben, deren Durchschnittslinie bestimmt werden soll. Von dieser sei der Punct k' (k'') bekannt, welcher auf der ersten Projectionsebene liegt, der Durchschnitt in der zweiten Projectionsebene aber nicht zu bestimmen. Um einen zweiten, beiden Ebenen gemeinschaftlichen Punct zu finden, lege man die Hülfsebene E^3, am einfachsten horizontal. Diese Ebene muß die Ebenen E^1 und E^2 nach zwei Linien a und b durchschneiden, welche mit den horizontalen Schnitten der gegebenen Ebenen parallel sind, und deren Durchschnitt m^1 zugleich in der Durchschnittslinie der gegebenen Ebenen liegt. Da nun m auch zu der Hülfsebene E^3 gehört, so muß seine zweite Projection in m'' liegen, und daher müssen die Linien k' m' und k''m'' die beiden Projectionen des verlangten Durchschnittes sein.

23. — Fallen beide Durchschnittspuncte über die Zeichnenebene hinaus, so ist man genöthigt, die Construction §. 22 doppelt auszuführen. Damit jedoch die bestimmenden Puncte m', m'' und n', n'' in möglichsten Abstand zu liegen kommen, welches Einfluß auf genauere Bestimmung hat, nimmt man eine der Hülfsebenen E^3 parallel der ersten Projectionsebene, die andere E''' parallel der zweiten Projectionsebene an, beide so weit als möglich von der Axe entfernt. Das Verfahren ist übrigens wie nach dem vorigen §.

24. — Es sind die drei Ebenen E, F und K durch ihre Schnitte gegeben, der gemeinschaftliche Durchschnittspunct soll gefunden werden (Fig. 44. u. 45.).

Man bestimme die Durchschnittslinie s′, s″ der Ebenen E und F, wie beschrieben; auf gleiche Weise die Durchschnittslinie k′, k″ der Ebenen F und K. Da der gesuchte Punct diesen beiden Durchschnittslinien gemein ist, so kann er nur in m′, m″ liegen.

Um die Ueberzeugung zu gewinnen, daß die Construction richtig ausgeführt worden, suche man die dritte Durchschnittslinie u′, u″ der Ebenen E und K auf; sie muß nothwendig ebenfalls durch den Punct m gehen.

Diese drei Durchschnittslinien an sich sind die Kanten einer dreiflächigen körperlichen Ecke, deren Vereinigungspunct m ist.

25. — Von einer Ebene E ist der Schnitt E^1 auf der ersten Projectionsebene gegeben und ein Punct a in der Ebene E durch die Projectionen a^1 und a^2.

Läßt sich bestimmen, wohin der Punct a in der Ebene G^1 fällt, wenn man sich die Ebene E um E^1 gedreht denkt, bis sie mit G^1 zusammenfällt, so nennt man diese Operation: den Punct a auf die Ebene G^1 herabschlagen (herabklappen, niederlegen, rabattre).

Das Verfahren ist folgendes: man fälle aus der Projection a^1 eine Normale auf E^1, construire das rechtwinkliche Dreieck $a^1\alpha\beta$, worin $\alpha\beta = a^2 a^0$, so ist $a^1\beta$ die wahre Entfernung des Punctes a von α. Diese trage man auf die Verlängerung von $a^1\alpha$, von α nach γ, wodurch man in dem Punct γ den um E^1 auf die Projectionsebene G^1 herabgeschlagenen Punct a hat.

Das Herabschlagen einer in der Ebene E gegebenen Linie ab erfolgt durch Herabschlagen eines jeden der Puncte a und b.

Man sieht, daß das Herabschlagen unter Anderm angewendet werden muß, wenn die wahre geome-

trische Entfernung zweier Puncte, die Länge einer Linie, die wahre Größe eines Winkels aus den gegebenen Projectionen gefunden werden soll. Demnächst wird es noch bei andern Constructionen häufig gebraucht.

26.—**Aufgabe.** Man hat die gegebenen Projectionen der Raumlinie ab, nemlich a^1b^1 und a^2b^2; es soll die wahre Länge der Linie ab gesucht werden, aus der diese Projectionen hervorgegangen sind.

Die Linie im Raum, welche die Puncte a und b verbindet, bildet (Fig.47) mit ihrer ersten Projection a^1b^1 und den projicirenden Linien aa^1, bb^1 ein an a^1b^1 rechtwinkliches Trapez, und ist noch $aa^1 = a^2a^0, bb^1 = b^2b^0$. Errichtet man daher (Fig.48.) in der aufgeklappten Lage der Projectionsebenen auf a^1b^1 zwei Normalen, macht die eine $a^1\alpha = a^0a^2$, die andere $b^1\beta = b^0b^2$ und verbindet $\alpha\beta$, so ist diese Linie die wahre Länge der Linie ab im Raum und man hat sie herabgeschlagen.

Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn die zweite Projection anstatt der ersten benutzt wird.

27.—Wenn man nur das Aufsuchen der wahren Länge beabsichtigt, ohne Rücksicht auf das Herabschlagen der Ebene zu nehmen, so läßt sich die Aufgabe sehr einfach lösen. Man ziehe mit der Axe parallel on durch a^2 und mache on gleich der ersten Projection a^1b^1, worauf man nb^2 zieht, welche Linie das gewünschte Resultat ist. Man hat nemlich bei diesem Verfahren die projicirende Ebene $b^2b^0a^2a^0$ um den Normalschnitt b^2b^0 gedreht, bis sie mit G^2 zusammenfiel, wo dann die zweite Projection b^2n nothwendig der Linie ab selbst gleich sein muß; dann ist zugleich a^1b^1 in eine der Axe parallele Lage versetzt, also on gleich b^1a^1.

28. — **Aufgabe.** In einer Ebene E, deren erster Schnitt E^1 gegeben ist, und die schief auf der ersten Projectionsebene steht, befindet sich ein Punct n, gegeben durch die Projectionen n' und n''; man soll denselben mit der Ebene E auf die erste Projectionsebene herabschlagen.

Man ziehe n^1a^1 normal E^1, nehme n^0y gleich n^1a^1 (wodurch wegen der Congruenz der Dreiecke $n''y$ gleich a^1n, wird); macht man a^1n, die Verlängerung von a^1n^1 gleich $n''y$, so ist n, der herabgeschlagene Punct.

Macht man a^1z gleich n^0n'', so ist n^1z gleich a^1n, eben so einfach gefunden.

29. — **Aufgabe.** In der Ebene E liegt eine Linie ab, welche den Schnitt E' schräg schneidet; man soll die Linie ab mit der Ebene E auf die erste Projectionsebene herabschlagen (Fig. 50.).

Dreht man die Ebene E um den Schnitt E^1, so wird die Linie ab fortwährend durch den Punct a^1 auf der ersten Projectionsebene gehen, dieser sonach auch ein Punct der herabgeschlagenen Linie sein. Um zu deren Bestimmung noch einen Punct zu erhalten, denke man in ab beliebig einen Punct n, dessen erste Projection n^1, und schlage diesen mit der Ebene auf G^1 herab; man ziehe also, wie vorhin, n^1c^1 normal E^1, mache n^0y gleich n^1c^1, cn, gleich $n''y$ und ziehe a^1n^1; dies ist die auf G^1 mit der Ebene E herabgeschlagene Linie ab.

30. — **Aufgabe.** Es ist eine Ebene E gegeben, man soll den Schnitt E'' derselben mit der Ebene auf die erste Projectionsebene herabschlagen (Fig. 51.).

Man nehme in dem Schnitt E^2 den Punct b^2 beliebig, ziehe b^2 b^1 normal der Axe, b^1a^1 nor-

mal E^1 und verlängere diese Linie nach b''; nehme dann E^0b^2 und schneide aus E^0 diese Verlängerung in b'' und verbinde E^0b''. Es ist dann $a'b''E^0$ das herabgeschlagene Dreieck $a^1b^2E^0$, also E^0b'' der mit E auf G^1 herabgeschlagene Schnitt E^2. Dieselbe Aufgabe ist in Fig. 52 bei anderer Lage der Schnitte wiederholt.

31. — **Aufgabe.** Es ist eine gerade Linie ab gegeben, man soll den Winkel α herabschlagen, den sie mit der ersten Projectionsebene bildet.

Man construire nach §. 16 den Durchgang b^2, errichte auf a^1b^1 die Normale $b'b''$ und nehme $b'b''$ gleich $b^1 b^2$. Hierdurch ist der Normalschnitt b^1b^2 mit abP^1 auf P^1 herabgeschlagen. Man ziehe also noch $a'b''$; dies ist die mit abP^1 auf P^1 herabgeschlagene Linie ab, und der Winkel b' a' b'' ist der verlangte Winkel α.

32. — **Aufgabe.** Es ist eine Ebene E gegeben, man soll den Neigungswinkel herabschlagen, den diese Ebene mit der ersten Projectionsebene macht (Fig. 54.).

Man nehme in dem Schnitt E^2 den Punct b^2 beliebig an, ziehe b^2b^1 normal der Axe, b^1a^1 normal E^1 und denke die Linie a_1b^2. Die Linien a_1b^1 und a_1b^2 sind Schenkel des Winkels α. Diesen Winkel herabzuschlagen, schlage man das Dreieck $a^1b^1b^2$ herab. Das Dreieck ist bei b^1 rechtwinklig, seine Katheten sind b^1b^2 und b^1a^1. Man nehme also b^1a_1 gleich b^1a^1 und ziehe b^2 a_1. Der Winkel $b^1a_1b^2$ ist der herabgeschlagene Winkel α.

33.—**Aufgabe.** Zwei schneidende Linien sind durch ihre Projectionen gegeben, man soll den Winkel herabschlagen, welchen die Linien bilden (Fig. 55.).

Man construire den Schnitt E^1 der Ebene, welche durch die Linie geht, mittelst der Durchgänge a^1 und c^1 nach §. 16. Durch diesen Schnitt und den Durchschnittspunct n im Raum ist die Lage der Ebene bestimmt.

Man schlage den Punct n mit der Ebene E nach Aufgabe §. 28 herab, indem man n^1h^1 normal auf E^1 fällt, n^0y gleich n^1h^1 und h^1n_1 gleich yn'' nimmt, dann a^1n_1 und c^1n_1 zieht.

Diese beiden Linien sind die mit E auf G^1 herabgeschlagenen Linien ab und cd, welche den gesuchten Winkel $a^1n_1c^1$ bilden.

34. — **Aufgabe.** Es ist eine Ebene E gegeben und eine Linie ab, welche die Ebene schneidet, man soll den Neigungswinkel gegen die Ebene herabschlagen (Fig. 56.).

Man fälle von irgend einem Puncte n der Linie ab eine Normale nq auf die Ebene E, schlage den Winkel β, nach §. 33, herab und bilde sein Complement α. Man construirt nemlich den Schnitt F'' der Ebene F, welche durch die Linien ab und nq geht und schlägt den Durchschnittspunct n der Linien mit F auf G^2 herab.

Man operirt dabei folgendermaßen: man zieht $n''p^2$ normal F'' und macht n^0y gleich $n''p^2$, $p^2n_{,,}$ gleich n^1y.

Die Puncte $n_{,,}$ und b^2 gehören der mit F auf G^2 herabgeschlagenen Linie ab, die Puncte $n_{,,}$ und q^2 der Linie nq an. Der Winkel $q^2n_{,,}b^2$ ist sonach β und eine Normale $n_{,,}z$ auf $q^2n_{,,}$ errichtet, gibt den verlangten Winkel α.

35.—Das Herabschlagen findet häufig Anwendung in den Operationen der beschreibenden Geometrie, weshalb man sich Fertigkeit erwerben muß, um das Verfahren vorkommenden Fällen leicht anpassen zu können. In der Praxis bedient man sich

seiner, um aus Grund- und Aufriß die geometrische Länge eines Mittel-, Kehl- oder Gratsparrens oder irgend eines Verbandstückes zu finden, welches die Zeichnung verkürzt gibt; die wahre Gestalt oder Größe eines Gewölbgrates u. dergl. mehr zu ermitteln. Das Herabschlagen ist sonach zu dem Verständniß einer Zeichnung, die nach einem Maßstab oder Verhältniß aufgetragen worden, dem Handwerker, Maschinenbauer, überhaupt dem Techniker wichtig, der nach dergleichen Zeichnungen zu arbeiten hat.

Mit Hülfe der vorliegenden Aufgaben ist man im Stande jede ebene Figur, deren bestimmende Puncte (Ecken) in den Projectionen vorliegen, in ihrem geometrischen Verhalten zu zeichnen, indem man nur alle Puncte oder Linien, welche Bestimmungsstücke sind, herabzuschlagen braucht, um aus ihnen die geometrische Figur selbst zu bilden. Beispiele hiervon werden in der Folge mehrere vorkommen.

36.—Das umgekehrte Verfahren: die Projectionen eines in der Projectionsebene G^1 gegebenen Punctes a^1 auf einer gegebenen Ebene E zu construiren, so daß derselbe mit der Ebene um E^1 auf G^1 herabgeklappt, in a^1 fallen wird, nennt man den Punct auf G^1 zurückklappen oder zurückschlagen;

37.—**Aufgabe.** Man soll den in einer Projectionsebene G^2 gegebenen Punct n in die Ebene E, deren Grundschnitte gegeben sind, zurückschlagen; (Fig. 57.) d. h. man soll die Projectionen desjenigen Punctes x der Ebene E construiren, welcher, mit der Ebene auf G^2 herabgeschlagen, in den Punct n fallen würde.

Man fälle die Normale nc auf den Schnitt E^2, schlage den Neigungswinkel α der Ebene E und

der zweiten Projectionsebene G^2 nach § 32 herab*), mache den Winkel cq^2n^1 gleich diesem Neigungswinkel α, $q''n'$ gleich $q''n$ und fälle $n'n''$ normal auf nc, $n''n_{,,}$ normal auf die Axe und nehme $n^0n_{,,}$ gleich $n''n'$: so sind n'' und $n_{,,}$ die gesuchten Projectionen.

Nimmt man $b''x$ gleich $q''n$, xy normal der Axe, so erhält man in $b''y$ und xy bequemer die Stücke $q''n'$ und $n^0n_{,,}$.

38. — Wenn die zu projicirende Linie, anstatt eine gerade zu sein, irgend eine Curve oder gemischte Linie ist, so reicht es oft hin, auf derselben eine Folge von Puncten anzunehmen, jeden Punct einzeln zu projiciren und dann die Verbindung aus freier Hand herzustellen, wodurch die Projection der krummen Linie hergestellt wird. Läßt sich dieses als allgemeine Lösung solcher Aufgaben betrachten, so gibt es doch Fälle, wo einfachere Constructionen möglich werden, weil die oder jene Curve nach einem bestimmt ausgesprochenen Gesetz gebildet war. Mehre solche Fälle werden bei Gelegenheit anderer Aufgaben vorkommen, andere können unerwähnt bleiben, weil sie wenig practischen Nutzen haben, wohin wir auch die Projicirung transcendenter Curven rechnen müssen. Die Behandlung derselben würde zu weit führen; weshalb auch nur wenig von den windschiefen Ebenen aufgenommen werden wird.

39. — Wenn Gerade und Ebenen durch ihre Durchgänge und Schnitte vollkommen bestimmt waren, ist dies bei krummen Linien und Flächen nicht allgemein der Fall.

---

*) Der Bequemlichkeit wegen möge das Verfahren hier wiederholt werden. Man nimmt a^1 in dem Schnitt E^1 beliebig, zieht $a^1\,a^2$ normal auf die Axe G^0, $a^2\,b^2$ normal auf E^2, construirt $a^2\,b''$ gleich $a^2\,b^2$ und zieht $a^1\,b''$.

Dritter Abschnitt

Projection von Flächen.

40. — Die beziehliche Lage einer Ebene A im Raume gegen die Projectionsebenen wird meistens durch ihre Schnitte S^1 und S^2, nöthigenfalls mit Zuziehung von S^3, bestimmt. Die Bedingungen, unter denen es geschieht, sind (86) genannt.

Uebrigens sind bei Operationen mit Flächen noch andere Sätze der Projectionslehre, die auf Ebenen Bezug nehmen, wie auch die Lehren der körperlichen Geometrie über Lage und Bestimmung von Ebenen ins Gedächtniß zu rufen.

41.— Obgleich die Bekanntschaft der geometrischen Ebenen, Flächen und Körper hier vorausgesetzt werden kann, so muß doch in dieser Beziehung folgendes bemerkt werden:

a) Die Begriffe eines Kegels, eines Cylinders müssen in der beschreibenden Geometrie allgemeiner aufgefaßt werden, als es gewöhnlich in der elementaren Geometrie geschieht, sie sind nothwendig von denen des elementaren Kegels und Cylinders zu trennen.

Wenn der elementare Cylinder und Kegel durch kreisförmige Grundflächen geschlossen wird, so erkennen wir in diesem nur den speciellen Fall eines allgemeinen Cylinders oder Kegels, gleichsam nur ein abgeschnittenes Fragment der beziehlichen allgemeinen Körperbildung.

Unser Kegel ist ein durch Grundflächen unbegrenztes Gebild. Wir betrachten dessen Entstehung während der Bewegung einer unendlichen Geraden a um einen in ihr liegenden Punct s (Spitze des

Kegels), wo sie nach und nach alle Puncte einer beliebigen (geschlossenen oder nicht geschlossenen, einfach oder doppelt gekrümmten) krummen Linie m durchläuft. Die unendliche Linie a heißt die Erzeugungslinie (génératrice), die krumme Linie m die Richtungslinie (Leitlinie, directrice) und die gerade Linie, in irgend einem Moment der Bewegung im Beharrungszustand gedacht, nennt man eine Seite des Kegels. Da die Erzeugende unbegrenzt ist, so kann auch der Punct s keine Grenze des Kegels sein; der Kegel setzt sich vielmehr zu beiden Seiten von s fort in unendlicher Ausdehnung: was Grundfläche heißt, ist nur ein zufälliger Schnitt des Kegels und der allgemeine Kegel selbst eigentlich nur die conische Fläche, kein Körper, der Mantel des elementaren Kegels aber ein besonderer Fall des hier erklärten Kegels. Noch mehr: da die krumme Richtungslinie als Krümmung von unendlichem Halbmesser, also im Uebergangsmoment zur Geraden gedacht werden kann, so hindert uns nichts, selbst noch als Kegel anzunehmen, wenn die Erzeugende an einer Richtungslinie fortgleitet, die eine Gerade ist.

b) Was für den Kegel gilt, bezieht sich auch auf den allgemeinen Cylinder, nur daß dessen Entstehung anderer Natur ist. Bei ihm ist die Bewegung der unendlich gedachten Linie a ein stetiges paralleles Fortschreiten an einer beliebigen (geschlossenen oder nicht geschlossenen, einfach oder doppelt gekrümmten) krummen Linie m, die in jedem Moment, wo sie in einen Punct der Richtungslinie (Leitlinie) m eintritt, eine Seite des Cylinders bildet. Sie ist in jedem Moment ihrer Bewegung in paralleler Beziehung mit einer constanten Ebene, der Parallelebene (plan de parallélisme, plan directeur); es wird ebenso unter „allge-

meinem Cylinder" nur die cylindrische Fläche verstanden, die nach keiner Seite hin durch Grundflächen abgeschlossen ist, und der Mantel des elementaren Cylinders ist ein specieller Fall des allgemeinen geraden Cylinders.

42. — Dem geraden Cylinder entgegen steht der windschiefe (schiefe) Cylinder (cylindre gauche). Dieser entsteht, wenn sich eine unendliche Erzeugungslinie p auf zwei ungleichen (geschlossenen oder nicht geschlossenen, geraden oder krummen, einfach oder doppelt gekrümmten) Richtungslinien a und b fortbewegt, so daß sie stets beide dieser Linien zugleich berührt und dabei mit einer gegebenen Ebene P, der Parallelebene, parallel bleibt. Da die Richtungslinien a, b ungleich sein müssen, so ist nicht ausgeschlossen, daß eine derselben eine Gerade sein kann. Sind beide Gerade, dann hört der Begriff des Cylinders auf und tritt der einer windschiefen Ebene ein.

43. — Demnach ist die windschiefe Ebene (plan gauche) ihrer Entstehung nach dem Cylinder ähnlich. Sie entsteht durch die fortgleitende Bewegung einer unendlichen Erzeugungslinie p, während diese in gleichzeitiger steter Berührung mit zwei andern unendlichen Linien, den Richtungslinien, und in paralleler Lage mit einer gegebenen Ebene P, der Parallelebene, bleibt

Die Richtungslinien aa', bb' liegen nie in einer Ebene und sind daher in gegenseitiger Beziehung windschiefe Linien. Ebenso wenig kann durch zwei Bewegungsmomente der Richtungslinie p,p' oder p,p'' rc. eine Ebene gelegt werden. Eine bildliche Darstellung einer windschiefen Ebene läßt sich nach Obigen nicht geben, so daß dadurch ein Verständniß herbeigeführt werden könnte. Da aber die Richtungslinien stets Gerade sein müssen, diese

aber durch ihre Durchgänge vollkommen bestimmt werden, so ist auch durch sie eine windschiefe Ebene bestimmbar. Der Schnitt einer windschiefen Ebene durch eine Ebene parallel den Erzeugungslinien nennt man eine Transversalseite (Querseite, génératrice transversale) der windschiefen Ebene.*)

44.—Ein allgemein gedachter Cylinder, 28b, ist durch einen seiner Schnitte und durch die Projectionen der Erzeugungslinie, oder: durch die Projectionen der Richtungslinie und der erzeugenden Linie bestimmt, was aus der Natur seiner Entstehung hervorgeht.

45.—Den allgemeinen Kegel, 28a, bestimmt ein Schnitt quer durch die erzeugende Linie, nebst den Projectionen seiner Spitze, oder: die Projectionen seiner Richtungslinie und der Spitze.

46.—Eine Kugel—die Umdrehungsfläche eines Halbkreises um den Durchmesser (ihre Drehungsaxe)—wird durch die Projectionen ihres Mittelpunctes

*) Windschiefe Ebenen treten in der Technik häufig auf; ebenso windschiefe Cylinder. So findet erstere sich bei einem Dach mit geraden Sparren, deren Giebelsparren unter verschiedenen Winkeln zusammenstoßen.

Ist die Belattung nach der Setzwage erfolgt, so ist jede der Latten Erzeugungslinie, die Sparren sind die Leitlinien, der Horizont gilt als Parallelebene.

Häufig werfen sich Breter nach windschiefen Ebenen, werden Quader nach dergleichen Ebenen behauen; und der Tischler hat zu sorgen, daß er seine Tafel nicht windschief abrichte. Der windschiefe Cylinder findet sich an einem Gewölbe, dessen Stirnbögen gleich sind, aber eine nicht parallele Stellung haben oder ungleich gebildet sind, bei einem Bohlendach, von ungleichen oder ungleich gestellten Giebelbögen, beim Steinschnitt u. a. Allgemeine Cylinder und Kegel sind so häufig anzutreffen, daß die Erwähnung einzelner Fälle unnöthig ist.

Endlich gehören, ihrer vielfachen Anwendung in der Technik wegen, hierher: die cylindrischen und conischen Spirallinien (Schrauben-, Schneckenlinien), die Abwickelungsflächen.

nebst Radius, oder durch die Projectionen ihres Durchmessers allein, bestimmt.

47.—Die windschiefe Ebene ist durch ihre Richtungslinien und die Parallelebene bestimmt; also auch durch die Projectionen ihrer Richtungslinien und die Schnitte der Parallelebene, oder: wenn ihre Schnitte und ihre Parallelebene gegeben sind.

48.— Jede mit der Parallelebene gleichliegende Ebene schneidet die windschiefe Ebene in einer Geraden; und es lassen sich in einer windschiefen Ebene unendlich viel gerade Linien denken, welche mit der Parallelebene parallel sind.

49.—Je zwei und zwei solcher Linien (Seiten) liegen stets in einer windschiefen Ebene und sind unter sich windschiefe Linien.

50.—Eine Ebene, die einen windschiefen Cylinder schneidet und dabei parallel seiner Parallelebene ist, schneidet den windschiefen Cylinder in einer Geraden, und diese heißt S e i t e d e s w i n d s c h i e f e n C y l i n d e r s. Jede Ebene von anderer Lage schneidet ihn im Allgemeinen in einer krummen Linie.

51.— Zwei dergleichen auf einander folgende Seiten eines windschiefen Cylinders sind im Allgemeinen windschiefe Linien.

52.—Ein windschiefer Cylinder ist gegeben, wenn die Projectionen seiner Richtungslinien und dessen Parallelebene durch ihre Schnitte, oder: wenn seine Schnitte und seine Parallelebene gegeben sind.

53.—**Aufgabe.** V o n e i n e m w i n d s c h i e f e n C y l i n d e r s i n d d i e P a r a l l e l e b e n e u n d d i e b e i d e n R i c h t u n g s l i n i e n **a**, **b** g e g e b e n; m a n s o l l d u r c h e i n e n b e l i e b i g e n P u n c t **m** i n **a** e i n e S e i t e v e r z e i c h n e n.

Man lege durch **m** eine Ebene E parallel der Parallelebene und suche den Punct **n**, wo solche die

zweite Richtungslinie b trifft. Die Verbindungslinie mn ist die verlangte Erzeugungslinie.

54. — **Aufgabe.** Die Projectionen der Richtungslinien und die Schnitte der Parallelebene sind gegeben, man soll die Schnitte der windschiefen Ebene construiren.

Man construire eine Ebene E, welche parallel der Parallelebene ist, bestimme die Puncte a, b, in welchen die Ebene E von den Richtungslinien der windschiefen Ebene geschnitten wird und construire die Gerade ab als Seite der windschiefen Ebene. Ferner construire man die Durchgänge a^1, b^2 von ab, so gibt a^1 einen Punct des ersten Schnittes, b^2 einen Punct des zweiten. Findet man auf dieselbe Weise mehrere Puncte der Schnitte und verbindet sie, so erhält man die Schnitte selbst.

Zu Erklärung dieser Auflösung möge in Figur 46a die Aufgabe dadurch vereinfacht werden, daß zu der genannten Ebene E die erste Projectionsebene gewählt wird. Die beiden Richtungslinien a^1b^2 und a_1b_2 gehen durch die erste Projectionsebene in den Puncten a^1 und a_1, die zweite in den Puncten b^2 und b_2. Da nun die Erzeugungslinie mit der ersten Projectionsebene parallel ist, so müssen auch alle Seiten in der zweiten Projectionsebene Parallelen mit der Axe bilden; es ist also auch b^2a eine Seite der windschiefen Ebene in zweiter Projection.

Die Schnitte erhält man einfach durch die Normalen aus den Durchgangspuncten b^2, b_2 und die Verbindungslinien der Fußpuncte mit den Durchgängen a^1, a_1. Die zweite Projection der windschiefen Ebene bestimmt sich durch die Projectionen der Richtungslinien b^2m, b_2n; die erste Projection wird gefunden, wenn man auf a_0b_2 eine Anzahl Theile trägt und diese nach Angabe der Figur auf die ersten Projectionen der Richtungslinien a^0a^1

und $a^0 a$, überträgt. Es wird dadurch die erste Projection in $a^1 a$, $a^0 a^0$ erhalten, und 2,2; 3,3; 4,4.... sind die ersten Projectionen von Seiten der schiefen Ebene.

55. — **Aufgabe.** Ein windschiefer Cylinder ist durch die Projectionen seiner Richtungslinien und die Schnitte seiner Parallelebene gegeben, die normal der Axe ist; man soll die Schnitte des windschiefen Cylinders finden.

Man construire eine Ebene E parallel der Parallelebene, bestimme die Puncte a und b, in welchen die Ebene E von den Richtungslinien geschnitten wird und verbinde ab. Man hat dann eine Seite des windschiefen Cylinders.

Construirt man ferner die Durchgänge a^1 und b^2 von ab, so ist a^1 ein Punct des ersten und b^2 des zweiten Schnittes des windschiefen Cylinders. Auf ähnliche Art suche man soviel Puncte als zum Zeichnen der Schnitte erforderlich sind.

56. — **Aufgabe.** Ist alles wie in der vorigen Aufgabe gegeben, es steht aber die Parallelebene nicht normal der Axe, und man soll die Projectionen der Richtungslinien des windschiefen Cylinders und die Schnitte seiner Parallelebene für irgend ein Paar Projectionsebenen bestimmen, die so liegen, daß die Parallelebene normal auf ihrer Axe steht: so wird die Lösung zusammengesetzter und man mache sich genau mit den §§. 25 bis 37 bekannt.

Zur Lösung der Aufgabe construire man eine Ebene Q, welche normal steht auf der Parallelebene P, und eine zweite V, die auf beiden Ebenen P und Q normal ist. Die Ebene V erhält man, wenn man durch einen irgendwo angenommenen Punct eine Linie legt, welche auf der Parallelebene

normal steht, und eine zweite, normal auf der Ebene Q und dann durch beide Normalen eine Ebene construirt. Die gegenseitig normalen Ebenen Q und V, auf deren Durchschnittslinie die Parallelebene normal ist, werden als vermittelnde Projectionsebenen benutzt.

Man nehme auf den Richtungslinien eine zu Bestimmung derselben genügende Anzahl Puncte an; fälle aus jedem dieser Puncte eine Normale auf die Ebene Q, und eine zweite auf die Ebene V, und construire die Durchschnittspuncte der Normalen mit den Ebenen Q und V.

Die Durchschnittspuncte sind Puncte der Projectionen der Richtungslinien auf den Ebenen Q und V. Man construire ferner die Durchschnittslinie qv der Ebenen Q und V, und die Linien, in welchen die genannten Ebenen von der Parallelebene geschnitten werden.

Mit der Ebene Q schlage man die in ihr liegende Durchschnittslinie mit der Parallelebene, die Linie qv und die in der Ebene Q liegenden Durchschnittspuncte auf eine der Projectionsebenen, etwa auf G^1, herab; mit der Ebene V schlage man ihre Durchschnittslinie mit der Parallelebene, die Linie qv und die in der Ebene V liegenden Durchschnittspuncte auf dieselbe Projectionsebene G^1 herab. Die eine von den herabgeschlagenen Ebenen schiebe man gegen die andere, so daß sie mit den Linien qv an einander stoßen und die herabgeschlagenen Durchschnittslinien mit der Parallelebene in eine gerade Linie fallen, während die in den Ebenen befindlichen Durchschnittspuncte auf entgegengesetzten Seiten der Linie qv liegen. Durch die Durchschnittspuncte zeichne man endlich die Projectionen der Richtungslinien, und man hat dann ein paar Projectionsebenen Q und V, auf deren Axen qv die Parallelebene

des windschiefen Cylinders normal steht, und die Projectionen seiner Richtungslinien in ihnen.

57. — **Aufgabe.** Es ist ein windschiefer Cylinder durch die Projectionen seiner Richtungslinien und durch die Schnitte seiner Parallelebene, die nicht normal der Axe steht, gegeben; man soll die Schnitte des windschiefen Cylinders construiren.

Man projicire zuerst den Cylinder auf ein paar andere Projectionsebenen, deren Axe normal der Parallelebene ist. Ferner construire man nach § 41 bei den zweiten Projectionsebenen eine Anzahl Seiten des windschiefen Cylinders und ihre Durchgänge in den zweiten Projectionsebenen, und nehme die Anzahl der Seiten so groß, daß die Durchgänge die Schnitte des windschiefen Cylinders zu bestimmen vermögen. Die sämmtlichen Durchgänge schlage man zurück. Durch je zwei der zurückgeschlagenen Durchgänge, welche zu einer Seite gehören, construire man diese Seite, und demnächst die Durchgänge der Seiten mit den ersten Projectionsebenen G^1, G^2. Diese Durchgänge bestimmen die verlangten Schnitte.

58. — Eine Fläche abwickeln heißt: sie zu einer Ebene aufgerollt darstellen. Das Resultat ist die Abwickelung (développement). Nicht alle Flächen lassen sich wirklich abwickeln. Man kann zwar die Umgrenzungsebenen ebenflächiger Körper in eine Ebene legen, so daß zwei und zwei der Ebenen eine Seitenlinie gemein haben; für eine so aufgeschlagene Begrenzungsebene braucht man jedoch die Benennung „Netz" und nicht Abwickelung.

Das Zeichnen eines Netzes besteht einfach in der geometrischen Construction jeder einzelnen Begrenzungsebene des Körpers und dem Zusammenstoßen von je zwei dieser Flächen mit einer gemein-

samen Kantenlinie, so daß ein zusammenhängendes Ganze entsteht, welches sich wieder zu dem Körper zusammenschlagen läßt. Die Operation ist so einfach, daß Beispiele hier unnöthig erscheinen. Ist jedoch das Netz aus den Projectionen des Körpers zu construiren, dann muß, wie leicht zu begreifen, das Herabschlagen zu Hülfe genommen werden, und man hat dann die Begrenzungslinien einzeln in wahrer Größe aufzusuchen, die man zu der geometrischen Zeichnung einer jeden Begrenzungsebene bedarf. Die Ausführung im Zusammenhange wird folgende Aufgabe nachweisen.

59. — **Aufgabe.** Es sei das Netz einer vierkantigen Pyramide zu zeichnen, deren Projectionen gegeben sind.

Man beginne mit der Grundebene **adec**. Zur geometrischen Bestimmung ist nöthig, das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke **ade** und **aec** zu zerlegen. Die Seite **ad** des ersten Dreiecks schlägt man herab, indem man a^1d_1 parallel der Axe zieht und gleich a^1d^1 macht, dann aus d^2 eine gleiche Parallele zieht und diese durch eine Normale aus d_1 schneidet. Es ist dann die Linie (3) die herabgeschlagene Linie a^1d^1. Zu Bestimmung der Seite **ae** ziehe man die Parallele mit der Axe a^1e_1 gleich a^1e^1 und eine zweite aus e^2, schneide letztere durch die Normale aus e_1, wodurch sich die Linie (9) als herabgeschlagene von a^1e^1 ergibt. Zu der dritten Dreiecksseite **de** ziehe man die Parallele $e^{IV}d^1$ gleich d^1e^1, dann eine Parallele durch e^2 mit der Axe und schneide letztere durch die Normale aus e^{IV}, es ist die Linie (5) die herabgeschlagene Seite **de**. Um die Kante **ab** herabzuschlagen, ziehe man a_1b^1 parallel der Axe, mache sie gleich a^1b^1, ziehe dann eine Parallele durch a^2 und schneide sie

durch die Normale aus a_1; es ist sonach (1) die herabgeschlagene Kante ab, u. s. w.

Um eine gewisse, zu Abhaltung von Irrungen nöthige Ordnung zu befolgen, lege man in der ersten Projectionsebene die Parallele durch den einen und in der zweiten Projection durch den andern Endpunct jeder Linie.

Hat man somit alle zur Bestimmung nöthigen Kantenlinien, hier 1 bis 9, gefunden, so ist es leicht, die Abwickelungsfigur 59 aus ihnen zusammen zusetzen.

Bei dem Zusammenklappen des Netzes zu Bildung des Körpers schließen sich die gleichbenannten Linien aneinander.

60. — Von den bisher genannten Körpern sind der Cylinder und der Kegel abwickelbar; überhaupt solche, deren nebeneinander liegende Seiten (Erzeugungslinien) in einer Ebene liegen. Die Eigenschaft des Abwickelbaren dehnt sich auch auf die Schraubenebene und Spiralebene aus; dagegen sind die windschiefe Ebene und der windschiefe Cylinder nicht abwickelbar, denn es sind je zwei aufeinander folgende Seiten stets windschiefe Linien, die nie in einer Ebene liegen, darum auch nicht in eine Ebene gebogen werden können. Daher auch die Unmöglichkeit, ein windschiefes Bret, Stück Pappe, Blech, welches windschief geworden, durch Biegung oder Pressung zur Ebene zurückbiegen zu können, ohne daß eine Ausdehnung oder Zusammenziehung dabei im Spiel ist.

61. — Eine Linie, die in einer abwickelbaren Fläche liegt, verändert bei dem Abwickeln ihre Gestalt, ohne ihre Länge zu ändern. Eine solche mit der krummen Fläche abwickeln, heißt: diejenige Linie herstellen, in welche sie gleichzeitig mit der abgewickelten krummen Fläche übergeht. Beispiele hiervon

werden bei den Projectionen von Cylindern und Kegeln vorkommen.

62.—Einen hohen Antheil beim practischen Zeichnen, namentlich von Maschinen, nimmt unter den Flächen der Kreis ein. Daß die Schnitte senkrecht der Axe bei dem Kreiscylinder und Kegel Kreise sind, wie auch die characteristischen Eigenschaften des Kreises, setzen wir als bekannt voraus.

Ein Kreis kann gegen die Projectionsebenen folgende Lagen annehmen; er steht entweder

1) senkrecht auf beide Projectionsebenen;
2) senkrecht auf die eine und parallel mit der andern;
3) senkrecht auf die eine, geneigt gegen die andere unter einem Winkel β;
4) geneigt gegen beide Ebenen und parallel der Projectionsaxe, oder endlich
5) geneigt gegen beide Projectionsebenen und mit der Axe einen Winkel α bildend.

Im ersten Fall sind beide Projectionen des Kreises Gerade und stehen normal in einem gemeinschaftlichen Puncte der Axe.

Das Projiciren bedarf keiner Erläuterung und hängt von der Projection des Mittelpunctes ab.

Zweiter Fall. In der Projectionsebene, auf welcher der Kreis normal steht, ist dessen Projection eine Gerade von der Größe des Durchmessers und parallel mit der Axe. In der andern mit ihm parallelen Projectionsebene ist seine Projection ein Kreis, congruent dem im Raum (Fig. 61.).

Auch hier ist die Projection des Kreises gefunden, wenn die Projectionen seines Mittelpunctes gefunden worden.

Dritter Fall. Auf der ihm senkrechten Ebene ist die Projection des Kreises ebenfalls eine Gerade von der Länge des Durchmessers, die einen Winkel β mit der Axe bildet. In der andern Pro-

jectionsebene bildet die Projection eine Ellipse, deren große Are gleich dem Durchmesser ist und normal auf der Are steht.

Eine Ebene E durch den Kreis gelegt, schneidet die eine Projectionsebene in einem Grundschnitt, der mit der Are den Winkel β bildet, während der andere Schnitt normal der Are und in ihr mit dem ersten Schnitt zusammentrifft.

Sind E' und E'' die Schnitte und c^2 die zweite, c^1 die erste Projection des Mittelpunctes, so denke man den Halbkreis um den Durchmesser ab gedreht und in die Projectionsebene G^2 gelegt, theile die Peripherie in vier gleiche Theile und ziehe f^2e^2, g^2d^2.

Die Puncte $a^2e^2c^2d^2b^2$ trage man in a^1b^1 auf E^1, fälle von der zweiten Projection aus Normalen und schneide sie durch die Horizontale von E^1 aus. Die Durchschnitte geben soviel Puncte der Ellipse, die man geometrisch construiren oder aus freier Hand einzeichnen kann.

Vierter Fall. Hier sind beide Projectionen Ellipsen, deren große Aren dem Durchmesser gleich und parallel der Are sind (Fig. 63.).

In diesem Fall liegt der Kreis in einer Ebene, welche die Projectionsebenen in zwei, der Are parallelen Schnitten S^1 und S^2 trifft. Die große Are beider Ellipsen, welche die Projectionen bilden, ist gleich dem Durchmesser, die Bestimmungen der kleinen hängt von dem Neigungswinkel α oder dessen Complement γ ab.

Man suche die Projectionen des Mittelpunctes c, nemlich c^1 und c^2, denke die Kreisebene mit ihrer Ebene in die Projectionsebene umgelegt, wo sie den Schnitt S bildet, der mit dem Normalschnitt N den Winkel α macht. Ebenso umgelegt um den Schnitt S^1 betrachte man den Kreis $c_{,,}$. Theilt

man nun beide Halbkreise wie im dritten Fall, trägt die auf den Durchmesser projicirten Theilpuncte durch Parallelen in die Projectionsebenen über, so ergeben sich in den Durchschnitten die Ellipsen, wie in der Figur zu sehen.

Fünfter Fall. Beide Projectionen sind Ellipsen, deren große Axen verkürzte Durchmesser sind.

Man suche die Schnitte S' und S'' der Kreisebene S und die Projectionen c^1, c^2 des Mittelpunctes c; ziehe $c^2c_{,,}$ und $c^1c_{,}$ parallel der Axe bis zu den Schnitten S', S'', beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser einen Halbkreis in $c_{,,}$, einen gleichen in d_1, die man beide wie beschrieben theilt.

Das Aufsuchen der Durchschnitte, welche Puncte der Ellipsen sind, erläutert die Figur hinlänglich.

Noch bemerke man, daß die Ellipsen um so genauer werden, jemehr Theilpuncte man auf den Normalkreisen annimmt, welche die Durchschnitte bestimmen.

63. — Auf ähnliche Art wie bei Kreisen lassen sich die Projectionen jeder ebenen Figur construiren, deren geometrische Bildung bekannt ist.

64.—**Aufgabe.** Es sei der Neigungswinkel α einer Ebene E gegen die Projectionsebene G^1 gegeben, und der erste Schnitt der Ebene E sei S^1: man soll den zweiten Schnitt S^2 auf der Projectionsebene G^2 finden (Fig. 65.).

Man ziehe mn normal S^1, mache n^0 gleich mn, errichte in n eine Normale np auf der Axe; trage dann in o den gegebenen Winkel α, gleich nop und verlängere np und op, bis sie sich schneiden: so ist S^0p der gesuchte Schnitt S^2 von der Ebene E auf der zweiten Projectionsebene.

65. — **Aufgabe.** Es sei eine Linie im Raum durch ihre beiden Projectionen a^1b^1

und a^2b^2 gegeben; es soll durch ab eine Ebene E und deren Grundschnitte S^1 und S^2 gefunden werden, so daß die Ebene E einen ersten Grundwinkel φ (mit der ersten Projectionsebene G^1) macht (Fig. 66 u. 67).

1. Fall. Wenn die Linie parallel der ersten Projectionsebene ist.

Ist ab parallel G^1, so ist der erste Schnitt S^1 parallel der ersten Projection a^1b^1 der Linie ab. Denkt man daher den Neigungswinkel bereits construirt, nämlich von a^1 auf S^1 eine Normale $\alpha^1\beta$ und $\alpha\beta$ im Raum gezogen, wodurch $a\beta a^1$ der Neigungswinkel wird, dann diesen Winkel $a\beta a^1$ um βa^1 auf die Ebene G^1 geklappt, so wird derselbe mit $a^1\beta\alpha$ zusammenfallen, wenn $a^1\alpha$ gleich a^1a genommen wird.

Um dies in der Zeichnung auszuführen, errichte man auf a^1b^1 eine Normale $a^1\beta$ in a^1, mache $a^1\alpha$ gleich aa^1, welches gleich a^0a^2 ist, lege in α einen Winkel $a^1\alpha\beta$ gleich $R - \varphi$, verlängere $\alpha\beta$ bis zu dem Durchschnitt β in $a^1\beta$ und ziehe $\beta\gamma$ parallel a^1b^1, so ist diese Linie $\beta\gamma$ der gesuchte Grundschnitt S^1.

Den zweiten Grundschnitt S^2 zu finden, verlängere man a^1b^1 zur Axe G^0, welche sie in x treffen mag, errichte xc normal G^0, bis sie a^2b^2 in δ trifft, so ist δ der Durchschnittspunct von ab im Raum mit der zweiten Projectionsebene G^2, und δS^0 der zweite Grundschnitt S^2 der Ebene E.

2. Fall. Wenn ab nicht parallel G^1 liegt.

Man construire zuerst das vorhin beschriebene Hülfsdreieck, welches auf der Zeichnenebene unmittelbar in der Figur wie folgt geschehen kann (Fig. 67).

Es seien nämlich a^1b^1 und a^2b^2 die gegebenen Projectionen, G^0 die Projectionsaxe, so errichte

man in a^1 auf a^1b^1 eine Normale $a^1\beta$, trage auf a^1b^1 das Maß a^0a^2 ($= aa^1$) in α und, da der Winkel in β gleich dem Neigungswinkel φ sein muß, dessen Complement $a^1\alpha\beta$ in α, wodurch das Hülfsdreieck $a^1\beta\alpha$ entsteht.

Hierauf suche man nach §. 16 einen Punct c, in welchem die Verlängerung der Linie ab im Raum die erste Projectionsebene G^1 durchdringt, beschreibe aus a^1 mit dem Radius $a^1\beta$ einen Kreis und lege an denselben von c aus die Tangenten cd, cd: so sind diese Linien erste Grundschnitte.

Sucht man ferner nach §. 16 den Punct δ, in welchem die Linie ab die zweite Projectionsebene schneidet, so kann auch der zweite Grundschnitt wie in dem ersten Fall leicht gefunden werden*).

Vierter Abschnitt.

Projection von Körpern.

66. — **Aufgabe.** Die Projection eines auf seine Diagonale gestellten Würfels zu construiren (Fig. 68).

Es sind G^1 und G^2 die beiden Projectionsebenen, G^0 deren Axe. Man nehme noch zwei Hülfsebenen E^I und E^{II} an, die senkrecht auf der ersten Projectionsebene, und deren Schnitte mit der Axe G^0 einen halben Rechten bilden; beide Ebenen sind in die Projectionsebene G^1 herabgeklappt. Auf E^1 ist, da diese Ebene um $\frac{1}{2}$ R von G^0 ab gedreht ist, die Projection des Würfels ein auf der Diagonale

*) Es ergeben sich für diesen Fall immer zwei Auflösungen, weil beide Tangenten Schnitte geben, die der Aufgabe entsprechen.

stehendes Quadrat, auf der Ebene E^2 ein Rechteck dessen eine Seite der Seite des Quadrats, die andere der Diagonale der Würfelseite gleich ist, und dessen Diagonale senkrecht auf dem Schnitt E^2 steht. Beide Projectionen sind in die erste Projectionsebene umgelegt *).

Mittelst dieser Hülfsprojectionen lassen sich nun die gesuchteen Projectionen sehr einfach construiren.

Man fälle aus allen bestimmenden Ecken der Projectionen A, B Normalen auf ihre Schnitte E^I und E^{II} und verlängere sie bis zu den beziehlichen Durchschnitten. Zieht man noch die Kantenlinien, so hat man die erste Projection $a^1b^1c^1d^1b_1c_1d_1$ des gegebenen Würfels gefunden. Die zweite Projection würde sich auf gleiche Weise ergeben haben, wenn man die Hülfsebenen nach der Anmerkung gestellt hätte. Hier aber hat man das Verfahren auf Uebertragen der Ordinaten abzuändern.

Man ziehe Normalen aus den Eckpuncten $a^1b^1c^1$.. der ersten Projection auf die Axe und verlängere sie in die zweite Projectionsebene; mache dann die Ordinate $G^0a_2 = E^{II}a_1$, $G^0a^2 = E^{II}a = G^0b_2$, $G^0d^2 = G^0c_2 = E^{II}c_1$ u. s. w. und verbinde die Puncte durch die Kantenlinien.

67. — Die Projectionen einer Kugel sind bei orthogonalen Projectionen immer congruent und größte Kreise unter jeder beliebigen Lage der Kugel; es ist der einzige Körper, der diese Eigenschaft besitzt. Diese Eigenschaft erklärt sich leicht daraus, daß die projicirende Fläche einer Kugel auf jeder Projectionsebene ein Cylinder ist, dessen Seiten pa-

*) Hätte man die Schnitte E^1 und E^2 so gelegt, daß sie in x die Projectionsaxe G^0 getroffen hätten, so würde man die Projectionen mit den Ebenen auf G^I herabschlagen und sie zur ersten wie zur zweiten Projection haben benutzen können.

rallele Tangenten der Kugel sind, sie also in einem größten Kreis berühren müssen. Kennt man daher die Projectionen des Kugelcentrums, so kennt man auch die der Kugel. Die Schnittflächen der Kugel sind in allen Lagen ebenfalls Kreise; kennt man die Schnitte der Ebene, worin ein solcher Kreis liegt, so lassen sich auch dessen Projectionen nach §. 62 finden.

68. — **Aufgabe.** Die Projectionen einer senkrechten Pyramide zu zeichnen, welche durch eine Ebene geschnitten wird (Fig. 69).

Der erste Schnitt der Pyramide ist ein n eck, welches durch geometrische Construction erhalten wird; die erste Projection der Spitze wird durch den Fußpunct der Normale aus der Spitze bezeichnet und die Kanten projiciren sich in den Verbindungslinien der Ecken mit der Spitze, also mit dem Fußpunct der Normale.

Hat man die erste Projection aufgetragen, so ziehe man aus allen Eckpuncten und der Spitze Normalen auf die Projectionsaxe, und, da bei der angenommenen Stellung der Pyramide die zweite Projection der Grundebene eine Gerade ist, (welche eigentlich in die Axe fällt) so schneiden die Normalen auf dieser Geraden die Fußpuncte der Kanten in a^2, b^2, c^2, b^2, e^2 2c. ab. Fällt die normale Höhe der Pyramide in t^2, so lassen sich auch die Kanten $(a^2b^2d^2e^2)t^2$ ziehen; die Kaute c^2t^2 fällt hinter die Pyramide. Ist nicht die normale Höhe $t't''$, sondern die Länge einer Kante z. B. e^2t^2 bekannt, so hat man zuerst den Punct e_1 in erster Projection herabzuschlagen.

Man denke das rechtwinkliche Dreieck t^2t^1e, um die eine Kathete t^1t^2 gedreht, bis es in die parallele Lage mit der zweiten Projectionsebene kommt, wo der Punct e_1 in l fallen wird, projicire l nach

l^1 und schneide aus l^1 die Normale aus t^1 mit dem Längenmaß der Kante e^2t^2, wodurch die Spitze der Pyramide bestimmt wird.

Auf gleiche Weise verfährt man, wenn die Höhe einer Seite gegeben ist.

Wenn die Projectionen der Pyramide construirt sind, so legt man den Schnitt E^{II} der Ebene E, welche hier normal G^2 gedacht worden. Dieser Schnitt trifft die Kanten der Pyramide in a, b, c, d und e. Fällt man aus diesen Durchschnittspuncten Normalen auf die beziehlichen Kanten der ersten Projection, so schneiden sie in $a^1b^1c^1$ . . . die Ecken der Durchschnittsebene, die man noch verbindet.

Es kann der Fall eintreten, daß der Schnitt einer Ecke zu spitzig, daher unsicher würde, wie hier bei c^1. Um ihn genauer zu bestimmen, schlage man die Kante t^1c_1 herab, wodurch sie in der zweiten Projection in t^1t^2 fällt; ziehe ck^1 parallel und k^1k normal der Are und mache t^1c^1 gleich t^1k, wodurch der Punct c in c^1 zurückgeschlagen wird und nun vollkommen bestimmt ist.

69. — **Aufgabe.** Dieselbe Pyramide soll so in Projection gebracht werden, daß deren Seite $a_1b_1t^1$ in die erste Projectionsebene fält und die Are t^1t^2 der zweiten Projectionsebene parallel liegt.

Man lege eine senkrechte Ebene parallel mit der Grundkante a_1b_1; deren Schnitt ist wr. Auf ihn trage man die Eckpuncte $_1c_1a_1b_1d_1e_1$ in w u v s und r durch Normalen über (Fig. 69). Ferner verlängere man a_1b_1 und ziehe auf diese Verlängerung normal mn, auf welche die Ecken $b_1c_1d_1$ und e_1 überzutragen sind.

Man ziehe nach dieser Vorbereitung wr Fig. 70 normal der Are und trage die Puncte w a_1 t b^1 und

r aus Fig. 69 auf*). Suche die Seitenhöhe $t_1 t^1$ Fig. 69 und trage sie in tt^1 Fig. 70, wodurch sich die Spitze bestimmt.

In der zweiten Projection construire man das Dreieck $a^2 c^2 t^2$. Es bestimmt sich für $a^2 t^2$ aus der ersten Projection und $a^2 e^2$ gleich mn. Auf $a^2 e^2$ trage man noch die Puncte mpon, welche die Fußpuncte der Kanten a_1 (oder b_1) $c_1 d_1$ und e_1 Fig. 69 sind, ziehe durch w, v und r Fig. 70 Parallelen mit der Axe und schneide sie aus der zweiten Projection durch Normalen aus $e^2 d^2 c^2$. Verbindet man die Durchschnittspuncte, so ergiebt sich die erste Projection der Grundebene der Pyramide.

70. — Allgemeiner ist die Projicirung einer Pyramide, welche durch eine Ebene schräg der Axe geschnitten wird, in folgender Aufgabe gestellt.

Aufgabe. Es sollen die Projectionen einer schrägen Pyramide, deren Grundebene abc auf der ersten Projectionsebene steht, deren Spitze s ist, und die durch eine Ebene E geschnitten wird, gefunden und die Schnittebene herabgeschlagen werden.

Die Grundebene und deren erste Projection sind dieselben, da sie auf der ersten Projectionsebene steht; ihre Lage und die beiden Projectionen der Spitze s aber ist durch die Projectionen bestimmt. Trägt man noch die Ecken $a^1 b^1 c^1$ auf G^0 durch Normalen über und zieht die Kantenlinien, so sind die Projectionen der Pyramide leicht gefunden.

Die Lage der schneidenden Ebene E ist durch die Schnitte E^1 und E^2 bestimmt; es handelt sich jetzt darum, die Schnittebene $\alpha\beta\gamma$ in beiden Projec-

*) Es ist dies dasselbe, als würde die Linie wr Fig. 69 mit der ersten Projection der Pyramide in die Lage wr Fig. 70 gedreht. Man bemerke noch, daß die Ecken der gegebenen Pyramide in einem Kreise liegen.

tionen zu construiren, welches durch Projicirung der einzelnen Puncte zu bewirken ist.

Man denke eine Ebene F durch die Kante z. B. a^2s^2, auf welcher man den Durchschnittspunct bestimmen will, gelegt, so sind deren Schnitte F^1 und F^2. Zieht man dann q^2q^0 normal der Axe, verbindet q^0p^1, wo die Schnitte G^1 und F^1 sich schneiden, so schneidet diese Verbindungslinie in der ersten Projection den Punct α^1, wo die schneidende Ebene E die Kante as durchdringt, nach seiner Projection.

Dies Verfahren wiederholt sich bei jeder Kante.

Um den Punct γ zu erhalten, fälle man sonach die Normalen c^2p^{II} und $q^{III}p^0$ und ziehe q^0p^{III}. Für deu Punct β sind die Normalen b^2p^{II} und $q^{IV}q^0$, dann die Verbindungslinie q^0p^{III} zu ziehen u. s. f. n Operationen bei n Kanten.

Das Uebertragen der ersten Projection in die zweite bedarf keiner Erläuterung.

Man soll ferner die Schnittebene mit der Ebene E herabschlagen. Um den Punct α herabzuschlagen, fälle man aus dessen Projection α^1 die Normale α^1x auf den Schnitt E^1, mache deren Verlängerung gleich der Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten gleich α^1x und $\alpha^0\alpha^2$ sind. Für den Punct β werden die Katheten gleich β^1y und $\beta^2\beta^0$, für γ gleich γ^1w und $\gamma^2\gamma^0$ genommen, wodurch die Durchschnittsfigur in ihrer wahren geometrischen Gestalt $\alpha\beta\gamma$ erscheint (Fig. 71 a).

71. — **Aufgabe.** Die Projection eines normalen Prisma's zu finden, dessen Grundfläche als erster Schnitt gegeben ist (Fig. 72).

Da die Kanten normal in den Eckpuncten der gegebenen ersten Projection und die Grundebenen des Prisma's in zweiter Projection Gerade sind, welche parallel der Axe liegen, so a^2e^2, fälle auf die Axe, und bis an genannte Linie verlängert, Normalen aus

den Eckpuncten in erster Projection a^1a^2, b^1b^2.... wodurch die zweite Projection der Grundebene und die Fußpuncte der Kanten bestimmt werden.

Zieht man noch die Parallele a″e″ mit a^2e^2 und verlängert jene Normalen bis zu ihr, so ist das Prisma auch in zweiter Projection gezeichnet. Da hier die Kanten des Prisma's mit der zweiten Projectionsebene parallel laufen, so ist der Abstand der Parallelen a^2e^2 und a″e″ der geometrischen Höhe des gegebenen Prisma's gleich zu machen.

72. — **Aufgabe.** Dasselbe Prisma steht schräg gegen die erste Projectionsebene und parallel mit der zweiten; es sind die Projectionen zu entwerfen (Fig. 73).

Man denke die Grundebene in paralleler Lage von a^2b^2 mit G^2 um a^2 gedreht und in die erste Projectionsebene gelegt. Da bei dieser Drehung alle bestimmenden Puncte Kreisbögen beschreiben, deren Mittelpunct a^2 ist, so ist das Prisma in die Stellung Fig. 72 gekommen, ohne seine zweite Projection zu verändern und wird so bleiben, wenn man es wieder um den gegebenen Winkel α zurückbewegt. Daraus folgt, daß man die unveränderte zweite Projection aus Fig. 72 nur auf die schräge Linie a^2e^2 Fig. 73, welche mit der Axe den gegebenen Winkel α macht, geometrisch überzutragen braucht, um die zweite Projection des Prisma's nach den oben gegebenen Bestimmungen zu erhalten.

Da die Lage des Prisma parallel der zweiten Projectionsebene sein soll, so müssen seine Kanten in dieselben Horizontalen fallen, welche durch die Ecken $a^1b^1c^1d^1$.... Fig. 72 gehen. Ist daher die erste Projection in Fig. 72 gefunden, so ziehe man aus allen bestimmenden Puncten Parallelen mit der Axe und schneide sie aus den correspondirenden Puncten der zweiten Projection Fig. 73 durch Nor=

malen. Verbindet man die beziehlichen Durchschnittspuncte, so erhält man die Kanten und somit die erste Projection nach den Bestimmungen der Aufgabe.

Man bemerke, daß die Kanten zum Theil unsichtbar werden.

73. — **Aufgabe.** Das nemliche Prisma ist gegen beide Projectionsebenen geneigt (Figur 74.).

Man löſ't die Aufgabe am einfachsten, wenn man zuerst beide Projectionen der vorigen Aufgabe construirt. Es ist dann nur nöthig, die erste Projection aus Fig. 73 geometrisch in Fig. 74 auf G^1 überzutragen, indem man den parallelen Kanten g_1g^1, F_1F^1 .... den Neigungswinkel gegen die Axe giebt, welchen die Aufgabe gegen die zweite Projectionsebene bestimmt. Man fälle dann aus den Eckpuncten $a_1b_1c_1d_1$ ...., $a^1b^1c^1$ ... Normalen auf die Axe G^0, verlängere und schneide sie aus den Puncten der zweiten Projection Fig. 73. Die Durchschnitte geben die beziehlichen Eckpuncte, die Verbindungslinien die Kanten der verlangten Projection in G^2.

74. — Allgemeiner findet sich die Aufgabe in dem Folgenden entwickelt. Man bedient sich dieser Lösung häufig, um in einer Projection eines Körpers die eigentliche Form anschaulicher zu machen.

Man denkt den Körper zuerst in eine solche Lage gebracht, daß seine beiden Projectionen die möglichst einfachen werden (Fig. 75); also z. B. in eine auf die erste Projectionsebene senkrechte und mit der zweiten beziehlich parallele Stellung seiner Flächen. Dann versetzt man denselben durch zwei allmählige und mit den Projectionsebenen parallele Drehungen in diejenige Lage, welche die günstigste ist, um in den beiden Projectionen eine leicht faßliche Ansicht des Körpers darzustellen (Fig. 76.).

Es sei z. B. eine Gerade a'b', a''b'' Fig. 76 gegeben, welche auf der ersten Projectionsebene senkrecht steht.

Denkt man diese Linie um die Projicirende a'a'' gedreht, während sie mit G^2 parallel bleibt, so kann sie auch einen Winkel mit G^1 einnehmen, wie er gewünscht oder gegeben wird. Während dieser Drehung beschreibt der Punct b^1, dessen Projection a^1 ist, den senkrechten Kreisbogen b'c', und b'' den Bogen b''c''. Nimmt man nun mit der Linie a'b', b''a'' eine zweite Drehung vor, so daß der Punct c'c'' einen horizontalen Kreisbogen c'd', c''d'' beschreibt, so wird dadurch offenbar der Winkel, welchen a'b', a''b'' mit der ersten Projectionsebene bildet, nicht verändert; und so kann man der Geraden ab jede beliebige Lage im Raum geben.

75. — **Aufgabe.** Um ein Parallelepipedon in einer zu beiden Projectionsebenen schrägen Lage zu projiciren, verfährt man demnach auf folgende Weise:

Nachdem die einfache erste Projection $a^1e^1b^1f^1$ und die zweite a''p''b''m'' gezeichnet ist, wird der Körper um den Drehungspunct a'' parallel mit G^2 bewegt, bis er die schräge Stellung a''n''c''q'' eingenommen hat, wobei p in q'', b'' in c'', m'' in n'' fällt, sonst aber die Gestalt der zweiten Projection nicht verändert wird; man braucht also über a''q'' nur das zuerst gezeichnete Rechteck geometrisch überzutragen.

Bei dieser Bewegung bleiben die Ebenen, in welchen die beschriebenen Kreisbögen liegen, die durch die Eckpuncte hervorgebracht werden, mit G^2 parallel, deren erste Projectionen daher auch mit der Axe G^1 gleichlaufend. Die Eckpuncte der ersten Projection fallen sonach in die Durchschnitte der Parallelen aus

a′, b′, e′, f′ mit den projicirenden Linien aus den Eckpuncten q″, a″, b″, n″....

Wir haben nun die erste Projection q′, a′, n′, c′ und die zweite q″, a″, n″, c″.

Nehmen wir jetzt mit dem Körper eine zweite Drehung um den unverrückten Eckpunct a′ (und a″) vor, so wird der Punct n′ den horizontalen Kreisbogen n′o′, und n″ den Bogen n″o″ (der sich in der Projection als Gerade präsentirt) beschreiben; und da diese Drehung mit G^1 parallel sich bewegte, so bleibt die Form des vorigen Resultats unverändert und man brauchte jene Figur nur geometrisch aufzutragen, wenn man die Kante a^1n^1 in der veränderten Lage a^1o^1, in welche sie durch die Drehung versetzt wurde, annahm.

Die neue zweite Projection wird erhalten, wenn man aus den Eckpuncten der ersten Projection senkrechte Projicirende nach G^2 zieht und diese so weit verlängert, bis sie die verticalen Projectionen der während der zweiten Drehung beschriebenen horizontalen Bögen durchschneiden, wodurch sich die zweite Projection in a″i″o″d″ ergibt, während die erste a′i′o′d′ ist.

76. — Eine zweite allgemeine Lösung dieser Aufgabe, welche oft einfacher ist, verändert nicht die Lage des Körpers zwischen G^1 und G^2 wie vorhin, wohl aber die Lage der Projectionsebenen (Fig. 77).

Es seien z. B. a′ und a″ die Projectionen eines Punctes a im Raum, dessen Projection in der Ebene E bestimmt werden soll. Dazu fälle man von dem gegebenen Punct auf die Ebene E eine Normale, und der Fußpunct dieser Normalen wird sodann die Lage der gewünschten Projection bestimmen: dieser neue Punct aber, dessen erste Projection in b^1 liegt, muß offenbar eben so weit von G^1 liegen,

als der Punct a (a'a'') selbst, und es muß daher auch seine zweite Projection in b'' liegen. Diese Projection wird jedoch im vorliegenden Fall nicht gebraucht.

Um die Projection des gegebenen Punctes a in E zu bestimmen, denkt man die Ebene E um ihren Normalschnitt gedreht und in G² niedergelegt. Während dieser Drehung beschreibt b' (oder b'') einen horizontalen Kreisbogen, und kommt in die Lage b'''. Ebenso konnte man auch E um ihren horizontalen Schnitt drehen, und in G¹ niederlegen, wodurch der Punct b', b'' in b'''' zu liegen kommt; dabei ist b'b'''' gleich der Höhe des gegebenen Punctes a', a'' über der Ebene G¹ oder gleich der projicirenden Linie a⁰a''.

Folgendes Beispiel wird die Ausführung mehr versinnlichen.

77. — **Aufgabe.** Es sollen die Projectionen eines Kreuzes nach einer gegen G¹ und G² schrägen Lage gezeichnet werden.

Man construire zuerst nach § 75 die einfachen Projectionen a'b'c'd' und a''b''c''d'' Fig. A und bestimme die Schnitte der verticalen Ebene, in welcher die neue Projection dargestellt werden soll. Alsdann ziehe man aus allen Bestimmungspuncten Normalen auf die neue Projectionsebene P'P'' und drehe letztere um einen ihrer Schnitte, um sie in G¹ oder G² niederzulegen. Daraus ergibt sich die neue Projection in G² Fig. B und so auch die in Fig. C nach ihrer Niederlegung in die horizontale Projectionsebene.

78. — **Aufgabe.** Es sei das Dreieck abc der erste Schnitt (Grundfläche) eines auf der Horizontalebene stehenden Prisma's, welches geneigt gegen beide Projectionsebenen ist (Fig. 79). Sonach ist a¹b¹c¹ die erste

Projection der Grundfläche, und $a_1b_1c_1a^1b^1c^1$ sei die erste $a^2b^2c^2a_2b_2c_2$ die zweite Projection des Prisma's. Das Prisma wird durch eine Ebene E geschnitten, welche durch ihre Grundschnitte E^1 und E^2 gegeben ist. Man soll die Projectionen der Durchschnittsfigur construiren und sie herabschlagen, d. i. sie in der wahren geometrischen Gestalt zeichnen.

Man nehme eine Hülfsebene F an, welche durch die Seitenkante a des Prisma's gelegt auf der zweiten Projectionsebene normal steht. Es sind sonach deren Schnitte F' und F''; der Schnitt F'' schneidet den E^2 in q^2, der Schnitt F^1 den E^1 in p^1.

Man fälle aus q'' die Normale q^0 und verbinde q^0p^1, so gibt der Durchschnitt α^1 mit der Kante a^1a_1 den ersten Punct der Durchschnittsfigur. Um andere Puncte des Durchschnitts zu erhalten, ziehe man aus den Durchschnittspuncten q^I, b^2 der Kanten mit E^2 Normalen auf die Axe, und aus den Fußpuncten derselben Parallelen mit q^0p^1, so ergeben sich soviel andere Durchschnitte auf den beziehlichen Kanten erster Projection, als man Eckpuncte zu suchen hat. Es ist dann einfach die Puncte der Durchschnittsfigur $\alpha'\beta'\gamma'$ . . . . in $\alpha''\beta''\gamma''$ . . . . der zweiten Projectionsebene durch Normalen zu projiciren.

Um die Durchschnittsfigur mit der Ebene E auf die erste Projectionsebene herabzuschlagen, fälle man aus α^1 die Normale α^1x auf den Schnitt E^1, verlängere sie und mache αx gleich der Hypotenuse eines Dreiecks Fig. 79_a, dessen Katheten gleich α^1x und $\alpha^0\alpha^2$ sind; ebenso verfahre man mit den andern Eckpuncten β',γ' . . . ., indem man das Dreieck aus $\beta'x''$ und $\beta^0\beta^2$, desgleichen aus γ^1x^1 und $\gamma^0\gamma^2$ . . . . bildet. Man erhält dadurch in $\alpha\beta\gamma$ . . . die herabgeschlagene Durchschnittsfigur.

79. — **Aufgabe.** Die Projectionen eines normalen Kegels zu finden.

Die Operation ist so einfach, daß es nur der Bemerkung bedarf, daß die erste Projection dem horizontalen Schnitt, also bei dem gewöhnlichen senkrechten Kegel einem Kreis gleich ist, dessen Mittelpunct die Projection der Spitze ist; die zweite Projection ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen ungleiche Seite der Durchmesser jenes Kreises, die gleichen Seiten der Seite des gegebenen Kegels gleich sind. Es mag nun die normale Höhe des Kegels oder die Länge einer Seite gegeben sein, so ist die Construction der zweiten Projection immer sehr einfach.

80. — **Aufgabe.** Die Projectionen eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche, dessen Axe mit der zweiten Projectionsebene parallel, gegen die erste aber geneigt ist, zu zeichnen (Fig. 81).

Die zweite Projection ist die nemliche des senkrecht stehenden Kegels, wenn man die Projection der Grundfläche unter den gegebenen Winkel der Neigung gedreht denkt, oder wenn die Neigung der Axe gegeben ist, daß man den Winkel $a^2b^2G^0$ dem Complement gleich macht.

In der ersten Projection hat man zuerst den Mittelpunct c^1 der Grundfläche zu bestimmen. Aus ihm ziehe man c^1c parallel und c^1c normal der Projectionsaxe und beschreibe aus beliebigen Puncten Halbkreise, von welchen der Durchmesser des Kreises c_1 normal der Axe, der des Kreises c unter dem Winkel $a^2b^2G^0$ mit der Axe gelegt wird. Jeden der Halbkreise theile man in vier gleiche Theile. Zieht man aus den Theilpuncten Ordinaten auf die Durchmesser, aus den Anfängen m,d,c,e,n Senkrechte auf die Axe und schneidet diese durch Parallelen aus $m_1d_1c_1e_1n_1$, so ergeben die Durchschnittspuncte Puncte der Ellipse, welche man aus freier Hand

verbinden oder die Ellipse mittelst der beiden gefundenen Axen construiren kann.

Die Projection der Spitze wird durch den Fußpunct der Normale aus s^2 auf a^1b oder deren Verlängerung gefunden. Alle Linien s^1a^1, s^1b^1, s^1c^1 .... sind erste Projectionen von Seiten des Kegels, so wie die Linien s^2a^2, s^2d^2 ..... Seiten desselben in zweiter Projection sind. Liegt die Projection s^1 der Spitze außerhalb der Grundebene, so sind die augenfälligen Seiten Tangenten von s^1 an der Ellipse.

81. — **Aufgabe.** Der Kegel liege so, daß eine seiner Seiten in die erste Projectionsebene falle, die Axe des Kegels aber eine schräge Lage gegen die zweite Projectionsebene nehme. Die beiden Projectionen ao und $a''o'$ der Kegelaxe sind gegeben (Fig. 80).

Man denke den Kegel gedreht, so daß der Durchmesser ed um den Mittelpunct o bewegt eine normale Lage d^1e^1 gegen G^0 annimmt, wo dann die Spitze a in a_1 fallen wird. Bei dieser Drehung kommt $o'a''$ in $o'a'$ zu liegen und der Durchmesser liegt, weil normal der Axe, in ab''. Da die Dimensionen des Kegels bekannt sind, so werden seine Projectionen a^1ecd und $a^1b^1d^1c^1e^1$ sein. Dreht man den Kegel zurück, daß die Spitze wieder in a fällt, dann nimmt die Grundfläche bcde die Stellung $b^1c^1d^1e^1$ ein. Weil nun die Projection des Mittelpunctes o^1 gegeben, so ist die Verticalprojection $a^1b^1c^1d^1e^1$ leicht zu finden; Tangenten, aus der Spitze a'' an die Ellipse gezogen, vervollständigen die gesuchte Verticalprojection.

82. — Bekanntlich lassen sich an einem Kegel von kreisförmiger Grundfläche folgende verschiedene Schnitte nachweisen:

a) Wird die Schnittebene senkrecht der Axe, d. i. parallel der Grundebene ge-

legt, so ist die Durchschnittsfigur ein **Kreis**; bei einem jeden allgemeinen Kegel eine ähnliche Figur in allen parallelen Schnitten.

b) **Liegt die Schnittebene eines Kreiskegels schräg der Axe** und schneidet alle Seiten, dann schneidet sie den Kegel in einer **Ellipse**. Sie bleibt Ellipse, wenn auch die Schnittebene, bei einem bestimmten elementaren Kegel durch die Grundfläche geschnitten wird, weil sich der Kegel immer über die Grundfläche hinaus verlängert denken läßt.

c) Die Ellipse kann in eine **Parabel** übergehen, wenn die schneidende Ebene sich bis zu der Lage dreht, wo sie mit der Seite des Kegels parallel wird. Die Parabel ist eine endlose, nicht in sich rückkehrende Linie.

d) Dreht sich die schneidende Ebene bis sie parallel der Kegelaxe liegt, so schneidet sie den Kegel in einer **Hyperbel**. Ihre Grenze liegt in der schneidenden Ebene, wenn diese mit der Axe des Kegels zusammenfällt; abwärts hat sie keine Grenze, daher auch die Hyperbel eine endlose, nicht in sich rückkehrende Linie ist. In dem Moment wo die schneidende Ebene durch die Axe geht, schneidet sie ein Dreieck, welches durch den Schnitt der Grundfläche geschlossen wird. Die Schnitte a und b hat der Cylinder mit dem Kegel gemein.

82a. — **Aufgabe.** Es sei ein Kreiskegel gegeben, dessen erster Schnitt (Grundfläche) der Kreis K^1 ist, und dessen Axe normal der ersten Projectionsebene steht, daher die Projection der Spitze in dieser Ebene der Mittelpunct s^1 ist. Die zweite Projection des Kegels ist durch den Durchmesser des Kreises K^1 und durch die zweite Projection s^2 der Spitze in dem Dreieck $d^0g^0s^2$

bestimmt. Der Kegel wird durch die Ebene E geschnitten, die normal der zweiten Projectionsebene und durch die Schnitte E', E'' gegeben ist: man soll die Durchschnittsfigur auf G^1 projiciren, sie herabschlagen und mit dem Kegel abwickeln.

Man denke eine zweite schneidende Ebene F parallel G^1, deren zweiter Schnitt F'' ist. Diese Ebene schneidet die E in einer Geraden (pq), deren zweite Projection der Punct q^2 ist (55.); die erste Projection steht normal der Axe und wird durch die Linie p'l' repräsentirt. Den Kegel selbst schneidet die Ebene F in einem Kreise vom Halbmesser tv. Dieser Kreis und die Gerade (pq) liegen in der Ebene F und schneiden sich in zwei Puncten a, b. Demnächst liegt der Kreis auch in dem Kegel und die Gerade ab auch in der Ebene E; daher liegen die Puncte a, b der Peripherie zugleich in dem Kegel und mit der Linie pq in der Ebene E, sind sonach zwei Puncte der verlangten Durchschnittsfigur.

Man darf daher von s^1 aus mit dem Radius tv die Normale p^1q^1 in a^1 und b^1 schneiden, so ergeben sich dadurch zwei Puncte a^1, b^1 der Durchschnittsfigur in erster Projection; in der zweiten liegen diese Puncte in q^2.

Auf gleiche Weise sucht man soviel Puncte der ersten Projection in der Durchschnittslinie $a^1 d_1 b^1 h_1 g_1$ auf, als man zu deren Bestimmung nöthig findet. Die zweite Projection der Figur stellt sich als Linie d^2g^2 dar (65.).

Bekanntlich ist die Schnittebene eine Ellipse; eine solche ist auch deren erste Projection. Die eine Axe der letztern wird auf dem parallelen Durchmesser d^1g^1 durch die Normalen d^2d^1 und g^2g^1 abgeschnitten; die zweite liegt auf der Normale, die aus

der Mitte von d^2g^2 auf d^1g^1 gefällt wird. Aus den Axen aber ist die Ellipse selbst leicht zu construiren.

Will man nun die Durchschnittsfigur mit der Ebene E auf die erste Projectionsebene herabschlagen, so nehme man E_0q gleich E^0q^2, errichte die Normale qa_1 und ziehe a^1a_1, b^1b_1 parallel der Axe; die Puncte a_1 und b_1 sind die herabgeschlagenen Puncte a, b. Ebenso verfahre man mit den übrigen Puncten. Wenn man die Ellipse mittelst der Axen zeichnen will, verlängere man g^1d^1 und nehme $xd_{,,}$ gleich E^0d^2 und xg^2 gleich E^0g^2; es ist dann $d''g''$ die eine, das Stück von qa_1 aber, welches zwischen den Parallelen aus a^1b^1 liegt, die andere Axe der Ellipse. Auf diese Weise läßt sich die Ellipse herabschlagen, ohne vorher ihre Projection auf G^1 construirt zu haben.

Es bleibt noch die abgewickelte Fläche des Kegels mit der Durchschnittsfigur zu construiren (Fig. 83).

Man denke den Kegel längs einer der Seiten, etwa s^2g^0, aufgeschnitten und aufgerollt. Da zwei und zwei neben einander liegende Seiten mit dem zwischenliegenden Stück des ersten Schnittes K^1 (der Kreislinie) ein gleichschenkliches Dreieck bilden (dessen ungleiche Seite unendlich klein gedacht), so ist der abgewickelte Kegel ein Kreisausschnitt $sg'm'g''$, dessen Radius gleich der Seite g^0s^2 des Kegels ist (Fig. 82) und dessen Bogen gleiche Länge mit der Peripherie der Grundfläche hat. Da es aber hier darauf ankommt, den dafür zu setzenden Bogen des Kreisausschnittes $g'm'g_{,,}$ durch den Mittelpunctswinkel $g'sg_{,,}$ zu bestimmen, so hat man diesen nach der bekannten Formel $\frac{r}{h} \cdot 4R$ d. i. $\frac{s^1g^1}{s^2g^0} \cdot 360$ zu berechnen. Hier ist der Winkel s des Kreisausschnittes 96° genommen worden; man hat ihn mittelst eines Transporteurs aufzutragen.

Hierauf theile man die Peripherie des Kreises K^1 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und in ebensoviel gleiche Theile den Bogen $g'g_1$, Fig. 83. Ist h^1 ein solcher Theil auf K^1, und h^1s^1 schneidet die Schnittebene in h_1, so projicire man h^1 auf E'' in h^2, schlage s^2h^2 herab und trage die herabgeschlagene Linie in Fig. 83 von s nach h. So verfahre man mit allen Puncten, wo die Radien der Theilung die Ellipse des Schnittes auf K^1 schneiden und verbinde die erhaltenen Puncte g, h, i, k . . .

Die eine Hälfte der abgewickelten Fläche ist der andern gleich; man kann daher immer eine herabgeschlagene Linie von beiden Seiten herein auf die Theillinien Fig. 83 auftragen.

Es kommt viel darauf an, daß die Ellipse der ersten Projection vollkommen genau sei. Da nun die gewöhnlichen Constructionen mittelst der Axen eine solche Genauigkeit nicht gewähren, so ist es besser, daß man jeden der Puncte, die auf die Theillinien fallen, besonders construire.

83. — Ein anderes Verfahren zu Lösung der vorigen Aufgabe.

Es ist Alles wie in voriger Aufgabe gegeben und soll die Ellipse des Schnittes in der ersten Projection gezeichnet und herabgeschlagen werden (Fig. 84.).

Da alle mit der Grundfläche parallelen Schnitte eines geraden Kegels Kreise sind, so sind auch die Parallelen 1, 2, 3, 4 . . . . die Verticalprojectionen solcher Kreise, und deren Durchschnitte mit den Seiten a^0s^2 und b^0s^2 in die erste Projectionsebene projicirt, schneiden daselbst die Durchmesser der beziehlichen concentrischen Kreise ab, deren Mittelpunct die erste Projection der Spitze s des Kegels ist.

Zur Construction des elliptischen Schnittes können nur Parallelen dienen, welche den Schnitt E^2 innerhalb der Grenzen a, b durchschneiden. Die

Puncte h,m,c . . ., wo die Parallelen den Schnitt E^2 treffen, sind der Peripherie des beziehlichen Horizontalschnittes und der des Schnittes E^2 gemein, werden also, wenn sie auf den correspondirenden Kreis der Horizontalprojection projicirt werden, soviel Puncte des elliptischen Schnittes in dieser Projection geben; hat man noch die Puncte a und b in a^1 und b^1 bestimmt, welche die Länge der großen Axe festsetzen, so läßt sich die Ellipse in der ersten Projection und um so genauer zeichnen, jemehr zwischen a und b Parallelen gelegt waren.

Um die wahre Figur des Schnittes, welche die Projectionen an sich nicht geben, herabzuschlagen, kann man auch folgendes Verfahren anwenden. Man denke die Schnittebene ab um b gedreht, bis ihr Schnitt mit der zweiten Projectionsebene eine Senkrechte F^2 wird.

Es ist klar, daß die Puncte bghm . . . . bei dieser Drehung Kreisbögen durchlaufen, die ihren Mittelpunct sämmtlich in b haben, und in der normalen Stellung den beziehlichen Abstand behalten, den sie in der frühern Lage hatten. Denkt man nun die Ebene F um ihre Axe F^2 gedreht, bis sie in die Ebene G^2 zu liegen kommt, so beschreibt sich um jeden übergetragenen Punct des Schnittes ein horizontaler Kreis, deren Halbmesser kein anderer sein kann, als der gleichnamige Abstand der elliptischen Linie in der horizontalen Projection des Kegels von dem Durchmesser a''b'. Trägt man also diese Ordinaten auf die beziehliche Parallele der Abwickelungsfigur von der Linie a_1b_1 ab nach $d_1e_1c_1m_1$, so bestimmen diese Puncte die elliptische Linie in ihrer wahren geometrischen Gestalt und Größe.

84. — **Aufgabe.** Es ist ein schiefer Kegel gegeben, dessen erster Schnitt der Kreis K^1 ist, während s^1 und s^2 die Projectionen der

Spitze s, $a''s^2$ aber die der Axe des Kegels sind (Fig. 85a); man soll die Projectionen der Durchschnittsfigur des Kegels mit der Ebene E, deren Schnitte E^1 und E^2 sind, zeichnen.

Man denke wie bei § 82a eine Ebene F parallel der ersten Projectionsebene gelegt, welche durch den Kegel und dessen Schnitt geht. Die Ebene E und F schneiden sich im Raum in einer Linie pq, welche die zweite Projectionsebene in q^2 durchdringt, so daß q^2 deren zweite Projection ist, die in E wie in F liegt. Die Linie pq selbst ist parallel mit dem Schnitt E^1 der Ebene E in der ersten Projectionsebene.

Die erste Projection von pq zu erhalten, fälle man die Normale q^2q^0 und ziehe q^0p^1 parallel E^1, welches die gesuchte Projection ist. Ist m der Mittelpunct des Kreises, welchen die Ebene F im Kegel schneidet, so ist ersichtlich, daß m^1 und m^2 die Projectionen dieses Punctes sind. Die erste Projection des durch F geschnittenen Kreises ist ein congruenter Kreis, die zweite liegt in F^2 und sein Radius ist m^2n^2. Mit diesem Radius schneide man aus m^1 die Linie q^0p^1 in b^1 und c^1; sie sind die ersten Projectionen von b und c, in welchen Puncten der Kreis und die Linie pq sich im Raume schneiden und die in der verlangten Durchschnittslinie liegen; die zweiten Projectionen werden durch Normalen c^1c^2 und b^1b^2 auf F^2 erhalten.

Um mehrere Puncte zur Construction des Schnittes paarweise zu erhalten, wiederhole man das Verfahren beliebig.

85. — **Aufgabe**. Den Schnitt eines Kegels der, parallel mit einer Erzeugenden, normal auf der senkrechten, geneigt gegen die horizontale Projectionsebene

steht (eine Parabel), auf beide Ebenen zu projiciren und herabzuschlagen (Fig. 85.).

Nachdem man den ganzen Kegel in beiden Projectionen gezeichnet hat, lege man die Schnittebene P in die zweite Projection und projicire die Puncte m und y auf die horizontale Projection in m^1 und y^1. Alsdann lege man zwischen m und y mehre Parallelen, welches die Schnitte von Ebenen sind, die, parallel der Horizontalebene gelegt, den Kegel in Kreisen schneiden, und in der ersten Projection sich in den Kreisen l^1, h^1, d^1 darstellen. Zugleich werden diese Kreise von der schneidenden Ebene in Sehnen geschnitten, die, weil normal der zweiten Projectionsebene, sich in den Puncten (m) ſf (y) projiciren. Werden diese Puncte auf die entsprechenden Kreise der ersten Projection durch Normalen projicirt, so müssen diese Normalen die Kreise beziehlich in zwei Puncten schneiden, welche Puncte der Curve sind. Diese Durchschnitte sind in Fig. 85 die Puncte $j^1 j_1$, $g^1 g_1$, $S^1 F_1$. Die Normale aus m gibt in m^1 auf dem Kreisdurchmesser den Scheitel, die aus s den Brennpunct in s^1, die aus y den Anfangspunct der Curve für den elementaren gegebenen Kegel. Verbindet man die gefundenen Durchschnitte, so ist die Parabel in $n^1 g^1 m^1 g_1 y^1$ gezeichnet.

Diese Curve herabzuschlagen, denke man die Schnittebene um den Winkel ymb bewegt, so daß sie die Seite sb des Kegels aufnimmt und dann in die parallele Lage mit der zweiten Projectionsebene gedreht, wie sie die Figur in $m''f''b''g''$ darstellt, wo sie der Bequemlichkeit wegen abgerückt ist. Bei dieser Bewegung behalten die Puncte $m''i''e''b''$ die Lage bei, die sie ursprünglich auf P hatten, und die Senkrechten in diesen Puncten müssen die beziehlichen Sehnen sein, in welchen die Kreise der ersten

Projection geschnitten werden. Man ziehe also diese Normalen, mache j''k'' gleich j'j,; F''g'' gleich F'F,; die durch b'' gleich n'g' und zeichne die Curve durch diese Puncte. Auf der Senkrechten durch s, gleich g'g,, liegt in s der Brennpunct der herabgeschlagenen Parabel, wo die Axe des Kegels die schneidende Fläche P durchdringt. Je genauer die parabolische Linie gefunden werden soll, desto mehr Parallelen muß man in der zweiten Projection legen.

86. — **Aufgabe.** Es sind die Projectionen eines Kegels gegeben.

Derselbe ist durch eine Ebene geschnitten, dessen erster Schnitt in P^1 gezeichnet ist, (Fig. 86) welcher zugleich die erste Projection des Kegelschnittes ist; man soll die zweite Projection des Schnittes entwerfen.

Aus der ersten Projection der Schnittebene sieht man, daß sie der Kegelaxe parallel gelegt und parallel der zweiten Projectionsebene, daher eine Hyperbel ist.

Zu Bestimmung der zweiten Projection des Schnittes, ziehe man aus s^1 eine Anzahl concentrische Kreise, welche den Schnitt P^1 schneiden. Diese Kreise sind ebensoviel Parallelebenen, welche die Schnittfläche und zugleich die Seiten a^1s^1 und b^1s^1 schneiden, die in s^2a^2, s^2b^2 vertical projicirt sind.

Projicirt man nun die Durchschnittspuncte b^1, F^1, d^1, k^1 auf die Seiten s^2b^2 oder s^2a^2 und zieht durch F^2, d^2, k^2 Horizontale, so sind diese Linien die zweiten Projectionen der Schnittebenen, welche in der ersten Projection durch die concentrischen Kreise repräsentirt werden. Da in ihnen aber zugleich die Sehnen liegen, die durch P^1 in den Kreisen geschnitten werden, so hat man noch durch Normalen aus den Puncten g^1, m^1 des Schnittes

P^1 diese Sehnen auf den beziehlichen Horizontalen in gh, mn abzuschneiden.

Die Normalen aus z^1z^1 bestimmen die Anfänge der Hyperbel für die Grundfläche des elementaren gegebenen Kegels, und die Parallele k^2l^2, bestimmt durch den Kreis, welcher den Schnitt P^1 berührt, schneidet die Kegelaxe in dem Scheitel i^2 der Hyperbel. Da die Schnittebene der zweiten Projectionsebene parallel ist, so ist die zweite Projection des Kegelschnittes zugleich seine wahre geometrische Gestalt.

87. — **Aufgabe**. Die Abwickelung eines schiefen Kegels, dessen erster Schnitt ein Kreis ist, zu entwerfen.

Man bereite wie in den frühern Aufgaben die Abwickelung damit vor, daß man die Peripherie des Grundkreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilt und aus den Theilpuncten Normalen nach der zweiten Projection der Grundebene zieht, um dadurch die Fußpuncte von soviel Seiten und durch Verbindung dieser Puncte mit der Spitze s'' die Seiten selbst in der Projection zu erhalten.

Man denke eine Ebene durch die Axe des Kegels und eine Seite des Kegels gelegt und herabgeschlagen; die Seite sei s''h'. Man ziehe nemlich $s''a_1$ unter beliebigem Winkel und mache sie gleich $s''a^2$, ziehe aus s'' Bögen durch die Fußpuncte b^2, c^2, d^2 . . . bis sie $s''a_1$ schneiden, und aus den Durchschnittspuncten auf $s''a_1$ Normalen. Auf diese Normalen trage man die gleichnamigen Ordinaten b'b'', c'c'', d'd'' . . . ., so sind die Hypotenusen $s''b_1$ $s''c_1$ . . . . die herabgeschlagenen Seiten des Kegels.

Angenommen, der Kegel sei in der Seite $s''a^2$ aufgeschnitten und aufgerollt (Fig. 88), so ziehe man sa beliebig, trage die Durchschnittspuncte von

$s''a_1$ Fig. 87 auf diese Linie über und ziehe durch bcd....i aus s concentrische Kreise.

Nun nehme man aus der ersten Projection die Sehne $b''c''$ gleich $c''d''$ ꝛc. und trage sie von a Fig. 88 auf den ersten Kreis b in 1, von 1 auf den zweiten c in 2 und so fort auf jeden folgenden über, bis die Anzahl der Fußpuncte erhalten ist, welche man in der ersten Projection bestimmt hat. Die Verbindung dieser Fußpuncte unter einander und die von a,a mit s ist die abgewickelte Kegelfläche.*)

88. — **Aufgabe.** Einen senkrechten Kreiscylinder zu projiciren, wenn dessen erster Schnitt und die Höhe gegeben sind (Figur 89.).

Der erste Schnitt des Cylinders ist der Kreis K^1 und zugleich dessen erste Projection. Die zweite Projection wird einfach gefunden, wenn man aus den Endpuncten des Durchmessers a^1g^1 Normalen auf die Axe zieht, verlängert und die Verlängerung der gegebenen Höhe gleich macht. Jede Normale aus einem Punct der ersten Projection nach der Axe und auf die zweite Projection gezogen, ist eine Seite des Cylinders, welche in der ersten Projection auf diesem Puncte steht.

89. — **Aufgabe.** Ein normaler Kreiscylinder ist parallel mit der zweiten Pro-

---

*) Diese Auflösung ist practisch zulässig, zumal wenn die Sehne $a'b''$ etwas vollkommen genommen wird. Um eine größere Genauigkeit zu erzielen, müßte die Länge des Bogens $a'b''$ für den Radius $a'e'$ berechnet und für diese Länge die Sehne a^1 für den Radius sa gefunden werden, weil der zu $a'b''$ gehörige Bogen größer ist, als der zu gleicher Sehne gehörige Bogen vom Radius sa, beide Bogen sich aber bei der Wiederherstellung des Kegels aus seiner Abwickelung decken müssen. Je kleiner die Theilung des Kreises genommen wird, destomehr wird man nach dem ersten Verfahren der Wahrheit näher kommen.

jectionsebene, aber geneigt, gegen die erste zu zeichnen.

Da der Cylinder parallel der zweiten Projectionsebene ist, so muß seine zweite Projection die gleiche der vorigen Aufgabe sein; man hat daher jene gefundene Projection nur um den Neigungswinkel α, welcher gegeben, zu drehen und geometrisch aufzutragen. Auf die Axe fälle man aus jedem bestimmenden Puncte Normalen und verlängere sie nach der ersten Projectionsebene (Fig. 95.).

Die Begrenzungsseiten des Cylinders in erster Projection sind die durch die Endpuncte des horizontalen Durchmessers $m,m_{,,}$ gezogenen Parallelen und die Figur der Grundebenen sind Ellipsen, deren große Axe der Durchmesser ab gleich $n,n_{,,}$, deren kleine durch die Normalen aus a, b bestimmt wird und damit leicht zu construiren ist. In der Figur ist nur die eine Ellipse $n,c,n_{,,}d,$ vollständig, von der andern nur der Theil $m,o,b,m_{,,}$ sichtbar.

90. — **Aufgabe.** Der Cylinder ist gegen beide Projectionsebenen unter Winkeln α und β geneigt; man soll diese Projectionen construiren (Fig. 96).

Man projicire den Cylinder erst in der Lage, wo seine Seiten parallel der zweiten Projectionsebene, aber geneigt gegen die erste sind, nach §.89. Man trage die erste Projection geometrisch in Fig. 96 über, jedoch unter Berücksichtigung des Winkels β, unter welchem die Seiten gegen die Verticalebene geneigt sein sollen, und erhält damit die Lage, wie verlangt, in der ersten Projection.

Zur Construction der zweiten Projection lege man eine Ebene E durch eine Seite, parallel der ersten Projectionsebene. Diese wird den Cylinder in zwei Linien $q_1 q^1$ und $r_1 r^1$ schneiden. Projicirt man die Durchschnittspuncte q^1, q_1, r_1, r^1 in die zweite

Projectionsebene, legt dann noch beliebig andere dergleichen Ebenen und verfährt auf gleiche Weise, so ergiebt sich nach und nach die vollständige zweite Projection des verlangten Cylinders.

91. — **Aufgabe.** Der Kreis K^1 sei der erste Schnitt (Grundfläche) eines geraden Cylinders, dessen Seiten normal auf der ersten Projectionsebene G^1 stehen (Fig. 89). Der Cylinder wird durch die Ebene E geschnitten und der erste Schnitt E^1 der Ebene E stehe normal der Axe, also die Ebene selbst normal auf der zweiten Projectionsebene; man soll die Durchschnittsfigur construiren, herabschlagen und mit dem Cylinder abwickeln.

Man ziehe einen Durchmesser a^1g^1 in K^1 parallel der Axe G^0, und construire nach §. 88 die zweite Projection des Cylinders. In dieser ist die Projection der Durchschnittsfigur ein Theil des Schnittes E'', während die erste Projection dem Grundschnitt des Kegels gleich (ein Kreis) ist. Alle Sehnen (Schnittebenen), die man in der ersten Projection legt, und sonach die mit E^1 parallelen Linien b^1, c^1, d^1 . . ., haben zu ihren Projectionen auf der Durchschnittsebene E'' Puncte b^2, c^2, d^2 . . ., welche durch Normalen aus b^1, c^1, d^1 . . . . auf die Axe bis zu dem Schnitt E'' leicht bestimmt werden können.

Man will die Durchschnittsfigur herabschlagen, d. i. in ihrer wahren geometrischen Gestalt darstellen, die bekanntlich eine Ellipse ist. Deren große Axe ist die Linie a^2g^2, die kleinere der Durchmesser des Kreises K^1, und es müssen die Sehnen in K^1, normal auf a^2g^2 durch die Puncte $b^2c^2d^2$ . . . gelegt, gleich denen b^1, c^1, d^1 . . . sein und die Ellipse des Schnittes bestimmen.

Soll nun die Durchschnittsfigur mit der Ebene E in G^1 herabgeschlagen werden, so verlängere man

den Durchmesser a^1g^1 nach g_1, ziehe aus dem Durchschnittspuncte des Schnittes E'' mit der Axe G^0, also aus E^0, den Schnitt E^1, mache ya^1 gleich E^0a^2 und yg_1, gleich E^0g^2, ziehe noch die mit G^0 parallelen Linien aus α und d^1, so sind die Axen der Ellipse gefunden und kann mit ihrer Hülfe die Ellipse construirt werden. Will man sie aber mittelst der Sehnen (Coordinaten) bestimmen, so ziehe man aus deren Endpuncten n^1, b^1, c^1, d^1 . . . Parallelen mit der Axe G^0, mache, um n zu erhalten, E^1n gleich E^0b^2 (E^0n^2); für den Punct c_1 mache man E^1c_1 gleich E^0c^2 u. s. w. Das practische Verfahren zeigen die punctirten Constructionslinien deutlich*).

92. — **Aufgabe.** Es ist ein Cylinder in einer gegen beide Projectionsebenen geneigten Lage zu zeichnen.

Man projicire (Fig. 96) nach §. 89 den Cylinder zuerst in einer Lage, wo seine Seiten parallel der zweiten Projectionsebene und geneigt gegen die erste sind, trage die erste Projection geometrisch über, jedoch mit Berücksichtigung des Neigungswinkels, unter welchem die Seiten gegen die Verticalebene geneigt sind. Dies ist die erste der gesuchten Projectionen nach der bedingten Lage.

Zur Construction der zweiten Projection lege man eine Ebene E durch eine Seite des Cylinders parallel der ersten Projectionsebene. Diese wird die Cylinderfläche in zwei Linien r^1r_1 und q^1q_1 und zugleich

*) Diese Aufgabe gewährt Technikern, welche Röhren aus Blech, Pappe oder ähnlichem Material herzustellen und sie knieartig zu verbinden haben, practischen Nutzen bei Anfertigung der Schablonen.

Sollen z. B. zwei gleichstarke Röhren A und B zusammengestoßen werden, so geschieht dies nach dem Schnitt E, und man hat die Abwickelung von A und B zu suchen, um die Schablone von beiden zu erhalten.

die Grundebene in den Sehnen $q'r'$ und $q,r,$ schneiden. Zieht man nun in G^2 eine Seite $b''n''$ unter dem Neigungswinkel mit der Axe G^0, den der Cylinder mit der ersten Projectionsebene machen soll; parallel in einem Abstand gleich $c'd'$ eine zweite Seite $a''m''$, desgleichen die Cylinderaxe $o''c''$ und projicirt die Endpuncte der Axen der elliptischen Grundebenen aus der ersten Projection in die zweite; dann kann man mittelst derselben die zweiten Projectionen der Grundebenen leicht zeichnen. Auch lassen sich noch mehre Puncte der Ellipsen durch die obengedachte und noch andere durch in den Cylinder erster Projection gelegte Schnittebenen bestimmen, wenn man vorziehen sollte, mittelst ihnen und nicht durch geometrische Construction die Ellipsen zu bestimmen. Hat man eine derselben gefunden, dann läßt sich die andere einfach abtragen, da beide Ellipsen einer Projection congruent sind.

93. — Man stelle sich einen senkrechten Cylinder mit kreisförmiger Grundebene vor und ein Dreieck, an dessen Grundlinie ein gegebener spitzer Winkel α liegt. Wickelt man dieses Dreieck so um den Cylinder, daß der eine Schenkel des Winkels die Peripherie der Grundebene nicht verläßt, während der zweite sich in steigender Curve der Cylinderfläche anlegt: so ist diese Curve eine cylindrische Spirale oder Schraubenlinie. Den Winkel α nennt man den Winkel der Schraubenlinie; von ihm hängt die Höhe oder der Abstand der Schraubenwindungen ab, und ein vollendeter Umgang des Schenkels bis wieder zur Cylinderseite des Anfangs heißt eine Windung der Schraube, ein Gang. Man sieht aus der Ableitung der Entstehungsweise, daß die abgewickelte Schraubenlinie nothwendig eine Gerade sein muß, und zwar die Diagonale eines Rechtecks, welches die abge-

wickelte Peripherie des Cylinders und die Höhe eines Umgangs zu Seiten hat.

Betrachtet man die größere Seite des Rechtecks oder den abgewickelten Kreis als Abscissenlinie, nimmt auf ihr in gleichem Abstand n rechtwinklige Ordinaten, deren jede als Cylinderseite angesehen werden kann, theilt die kleinere Seite des Rechtecks ebenfalls in n gleiche Theile und zieht durch die Theilpuncte Parallelen mit der Abscissenlinie, dann die Diagonale, so muß letztere jede abgewickelte Seite in dem Puncte schneiden, wo die Schraubenlinie diese Seite auf dem Cylinder trifft.*)

94. — **Aufgabe.** Es ist der Kreis C' gegeben, als erster Schnitt eines senkrechten Cylinders, die Puncte o, a', b', c'.... seien die Fußpuncte oder ersten Projectionen gleich weit von einander abstehender Seiten (Fig. 92), und o, a'', b'', c''.... diese Seiten in zweiter Projection: man soll auf dem Cylinder die Schraubenlinie zeichnen, welche die Grundfläche in a'' trifft und a''n'' zur Höhe hat.

Man theile die Peripherie des Kreises C' in n gleiche Theile, hier 12, von dem Punct a' ausgehend; in ebensoviel (n) gleiche Theile die Höhe a''n'' des vollendeten Umgangs der Spirale. Aus den Theilpuncten a', b', c'.... ziehe die Seiten a''a,,, b''b,,, c''m''.... Da nun mit der Anzahl der Seiten die Anzahl der Theile in der Höhe des Umgangs übereinstimmen, so muß nothwendig die Spirale auf jeder folgenden Seite sich um einen der Theile 1,2,3,4.... erheben, um bei dem nten Theil

*) Die oben beschriebene Erzeugung einer Schraubenlinie kann technisch benutzt werden, um auf einem gegebenen Cylinder eine Schraubenlinie zu verzeichnen.

wieder auf die Seite des Anfangs zu gelangen und einen Umgang zu beenden.

Man ziehe deshalb durch die Theile 1,2,3,4... Parallelen mit der Grundebene und zeichne die Spirale durch die Puncte, wo die Parallelen die Seiten nach und nach schneiden; wobei zu bemerken, daß von der Seite F″F,, ab die Spirale auf den hintern Seiten liegt, also dem Auge verdeckt wird, bis sie wieder die Seite op erreicht hat, wo dann der zweite Umgang, wie zuvor beginnt. Ist ein Umgang vollendet, dann lassen sich die Puncte der folgenden einfach dadurch bestimmen, daß man die Höhe a″n″ von jedem gefundenen Punct der Windung aus auf den Seiten weiter schlägt.

Die erste Projection der cylindrischen Spirale liegt in der Peripherie des Kreises C′.

95. — Nimmt man eine cylindrische Spirale cdefg.... und eine Gerade ab als Richtungslinien (Leitlinien) einer windschiefen Ebene, eine andere Gerade mn als Erzeugungslinie und die horizontale Projectionsebene als Parallelebene (Fig. 97), so entsteht bei fortschreitender Bewegung der Erzeugenden eine Spiralfläche. Es ist nicht ausgeschlossen, daß anstatt der geraden ab eine zweite Spirale die andere Richtungslinie vertreten, auch daß die Parallelebene eine Kegelfläche sein kann, d. i., daß die Erzeugungslinie nicht normal der Axe, sondern mit ihr einen constanten Winkel bildend, fortschreitet. Das letztere findet statt bei einer Schraube, wo das Schraubengewinde ein dreikantiges Prisma ist.*)

96. — **Aufgabe.** Eine Spiralfläche zu zeichnen.

---

*) Jede Schraube, Wendeltreppe ꝛc. ist eine dergleichen Spiralfläche, und namentlich ist sie deutlich bei der untern Flächenverkleidung einer freistehenden gewundenen Treppe.

Man zeichne, wenn beide Richtungslinien Spirale sind, die concentrischen Kreise K^1 und C^1 als erste Projectionen der Richtungslinien, theile die Peripherie von K^1 in n (hier 16) gleiche Theile (Fig. 97) und ziehe die Radien a1, a2, a3.... Jeder Radius ist ein Stadium des Fortschritts der Erzeugungslinie von Seite zu Seite des einschließenden Cylinders. Ferner theile man die Höhe einer Windung ebenfalls in n gleiche Theile und ziehe durch die Theilpuncte Parallelen; im Uebrigen verfahre man wie § 90. Dasselbe Verfahren hat man wiederholt anzuwenden bei der innern Spirale, wozu dieselben Parallelen, jedoch die Theilpuncte des Kreises C^1 benutzt werden. Man bemerke noch, daß der Theil cdeo die obere Fläche, der efgq dagegen die untere Fläche dem Auge bietet.

97. — Der spirale Cylinder entsteht, wenn eine Kugel sich auf einer Spirallinie fortbewegt (Fig. 98). Aus der Natur der Kugel folgt, daß dann deren Mittelpunct ebenfalls eine Spirallinie beschreibt, welches ein leichtes Mittel an die Hand gibt, eine cylindrische Spirale zu zeichnen.

Man construire die Spirale nach Maßgabe der Umstände, nehme sie als diejenige, welche der Mittelpunct der Kugel durchlaufen würde und als geometrischen Ort der Mittelpuncte von einer beliebigen Anzahl Kreise c, c^1, c^2, von dem Durchmesser des verlangten Durchschnitts der cylindrischen Spirale. Die Seiten des gewundenen Cylinders tangiren diese Kreise.*)

98. — **Aufgabe.** Der Kreis K^1 sei der erste Schnitt eines elementaren senkrechten Kegels;

---

*) Der spirale Cylinder kommt vor bei Schlangenröhren (Kühlröhren), bei der archimedischen Schraube, bei Seilen, die über eine Welle laufen.

die Puncte s^1, s^2 seien die Projectionen seiner Spitze (Fig. 99). In der ersten Projection ist eine gewöhnliche archimedische Spirale gegeben, deren Pol der Mittelpunct des Kreises s^1 ist; man soll die zweite Projection der Spirale construiren und sie mit dem Kegelmantel abwickeln.

Man theile den Kreis K^1 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile a^1, b^1, c^1.... und ziehe Radien, welche ebensoviel Seiten des Kegels in erster Projection sind, projicire die Endpuncte a^1, b^1, c^1... auf mn und ziehe die Seiten nach der Spitze s^2. Theilt man nun auch die Höhe einer vollen Windung in ebensoviel gleiche Theile und zieht Parallelen mit mn, so reducirt sich das übrige Verfahren auf das bei der Construction einer cylindrischen Spirale, § 94.

Dieses Verfahren ist nur anwendbar, wenn sich die Spirale in jedem gleichen Moment ihrer Bewegung in gleicher Höhe hebt; ist man dessen nicht versichert, so projicire man jeden Durchschnitt der Spirale mit einer Seite in der ersten Projection auf die beziehliche Seite der zweiten Projection und verbinde die projicirten Puncte. Wo die projicirenden Linien die Seiten der zweiten Projection zu spitzig schneiden, daher undeutliche Schnitte geben, kann man sich helfen, daß man diese Seite mit dem Durchschnitt der Spirale in zweiter Projectionsebene herabschlägt und damit den Punct der Spirale genauer bestimmt; oder daß man durch die zunächst liegenden sichern Durchschnitte der Spirale auf den Seiten Parallelen mit mn zieht, deren Abstand in soviel Theile theilt, als zwischen den beziehlichen Seiten der ersten Projection Theile liegen und Parallelen zieht, welche dann die Schnitte vollkommener bestimmen.

Zu der Abwickelung des Kegelmantels mit der Spirale (Fig. 100), zeichne man, nach § 77 zuerst die des Mantels und theile den Kreisbogen in soviel gleiche Theile, als der Kreis K^1 erhalten hat. Da die Spirale zwei volle Evolutionen macht, so theile man sb_1 in zweimal soviel Theile als den Kreis K^1, trage in d1 einen, in e2 zwei, in d3 drei solcher Theile u. s. f. bis b_1c_1, mache dann $b''c''$ gleich b_1c_1, dh gleich $b''c'' + 1$, ei gleich $b''c'' + 2$ solcher Theile und fahre so fort, bis die Spirale s erreicht.

Kennt man das Gesetz nicht, nach welchem die Spirale in der ersten Projection construirt ist, dann bleibt nichts übrig, als die Längen d1, e2, d3 in der zweiten Projection herabzuschlagen und die herabgeschlagenen Längen in Fig. 100 einzutragen.

99. — Die Construction der cylindrischen Spirallinie und Spiralfläche kommt beim Zeichnen der Schrauben, wie gesagt, in Anwendung, wovon Fig. 105, 106 und 107 Beispiele geben.

In Figur 105 ist eine doppelte Spirallinie zu den Gewinden aba^1b^1, efe^1f^1 2c. und eine doppelte Spirallinie um den innern massigen Cylinder nöthig, wovon jedoch ein Theil durch den gedachten Cylinder verdeckt wird.

Das Weitere ist aus dem Vorhergehenden und durch die Figur deutlich.

Hat man die Spirale aa^1ee^1 construirt, so läßt sich dadurch die Construction der andern ersparen, daß man auf alle Senkrechte die Höhe ab als Abstand der Spiralen trägt. Dieselbe Erleichterung gewährt das Auftragen der Höhe eines vollen Umganges auf jede der Normalen, so oft als es die Länge der Schraube fordert.

Die gleiche Anzahl von Spiralen erfordert die Construction der zugehörigen Schraubenmutter (Fig.

106), wiewohl in dem verticalen Durchschnitt durch die Axe, wie die Figur darstellt, nur Theile derselben zu sehen sind, welches mehrere Erleichterungen beim Zeichnen möglich macht.

Die Einschnitte fed, $c^1b^1a^1$ correspondiren mit den Gängen der Schraube und können nach dieser zuerst abgetragen werden.

Bei der dreikantigen Schraube bedarf es nur drei Schraubenlinien (Fig. 107), die überdem zur Hälfte verdeckt sind. Die Figur erklärt das Uebrige.*)

100. — **Aufgabe.** Ein Ikosaëder zu projiciren, dessen constituirende Seitenebene in Figur 101_a in geometrischer Gestalt gegeben ist.

Da die Bildung eines Ikosaëders deutlicher wird, wenn es in verschiedenen Wendungen vor Augen tritt, so sind hierzu zwei ganz abweichende Stellungen in Figur 101 und 102 gewählt worden. Beide haben dieselbe Größe der Begrenzungsebenen und, da beide auf eine Spitze gestellt sind, congruente erste Projectionen, nur sind sie verschieden um ihre Axe a^1 gedreht.

Bekanntlich ist die Umfläche eines Ikosaëders aus 20 gleichseitigen Dreiecken gebildet und die Körperecken liegen sämmtlich in einer Kugelfläche. In der senkrechten Stellung des Körpers und wenn

---

*) Eine vierkantige (breite) Schraube kann erklärt werden, als winde sich ein Parallelepipedum in gleichbleibendem Abstand um einen Cylinder. Bei der dreikantigen (scharfen) Schraube ist es ein dreikantiges Prisma, welches sich unmittelbar zusammengerückt um den Cylinder windet.

In der Regel sind die Höhen e'f' der Gänge der Breite d'e' gleich; bei dreikantigen Schrauben kann man das Prisma von gleichseitiger Durchschnittsfläche oder so wählen, daß die Fläche, die sich um den Cylinder legt, im Durchschnitt der Höhe des Dreiecks gleich ist.

die Axe durch zwei gegenliegende Ecken angenommen wird, liegen die übrigen Ecken in zwei Parallelebenen, bilden in jeder ein reguläres Fünfeck, so daß über jeder Seite des untern eine Ecke des obern liegt; die beiden Pole liegen in einem größten Kugelkreise.

Um also die horizontale Projection zu entwerfen, hat man ein reguläres Zehneck zu construiren, in welchem sich die Kanten des Ikosaëders nach Fig. 102 verbinden. Die Construction der zweiten Projection hängt von dem Abstand der gedachten Parallelebenen ab; hat man diese, so ist das weitere Verfahren ein einfaches Projiciren der Ecken in der ersten Projection in diese Ebenen, mittelst Normalen auf die Axe G^0.

Man beginne mit der Bildung des constituirenden Dreiecks kld_1 (Fig. 101.). Es ist nemlich die Kante kl parallel G^1, daher deren erste Projection ihre geometrische Länge. Wäre die Seite lk nicht rechtwinklich der Axe gestellt, so hat man zuvor die Drehung der ersten Projection dahin zu bewirken. Man bestimme die Lage der Axe $a_{,,}a''$ und ziehe die Normale b^1i. Da die Kante a'b' parallel der zweiten Projectionsebene, so ist a''b'' die wahre Länge. Man schneide daher mit dem Radius, gleich einer Dreiecksseite, die Normale b'i in b'', welcher Punct in der untern Parallelebene liegt, diese also bestimmt.*)

Zieht man d,h normal G^0, macht b''i gleich b'h' dann ist durch i auch die andere Parallelebene bestimmt, von welcher die Spitze $a_{,,}$ denselben Ab-

---

*) Diese Bestimmung wird auch durch das gleichschenkliche Dreieck feb erhalten, worin fe und b'f gleich der Dreiecksseite, b'e gleich der Sehne Fk ist, wenn man a''b'' parallel Fe abschiebt, wo dann auch b''e parallel a''f sein muß.

106), wiewohl in dem verticalen Durchschnitt durch die Axe, wie die Figur darstellt, nur Theile derselben zu sehen sind, welches mehrere Erleichterungen beim Zeichnen möglich macht.

Die Einschnitte fed, $c^1b^1a^1$ correspondiren mit den Gängen der Schraube und können nach dieser zuerst abgetragen werden.

Bei der dreikantigen Schraube bedarf es nur drei Schraubenlinien (Fig. 107), die überdem zur Hälfte verdeckt sind. Die Figur erklärt das Uebrige.*)

100. — **Aufgabe.** Ein Ikosaëder zu projiciren, dessen constituirende Seitenebene in Figur 101_a in geometrischer Gestalt gegeben ist.

Da die Bildung eines Ikosaëders deutlicher wird, wenn es in verschiedenen Wendungen vor Augen tritt, so sind hierzu zwei ganz abweichende Stellungen in Figur 101 und 102 gewählt worden. Beide haben dieselbe Größe der Begrenzungsebenen und, da beide auf eine Spitze gestellt sind, congruente erste Projectionen, nur sind sie verschieden um ihre Axe a^1 gedreht.

Bekanntlich ist die Umfläche eines Ikosaëders aus 20 gleichseitigen Dreiecken gebildet und die Körperecken liegen sämmtlich in einer Kugelfläche. In der senkrechten Stellung des Körpers und wenn

---

*) Eine vierkantige (breite) Schraube kann erklärt werden, als winde sich ein Parallelepipedum in gleichbleibendem Abstand um einen Cylinder. Bei der dreikantigen (scharfen) Schraube ist es ein dreikantiges Prisma, welches sich unmittelbar zusammengerückt um den Cylinder windet.

In der Regel sind die Höhen e'f' der Gänge der Breite d'e' gleich; bei dreikantigen Schrauben kann man das Prisma von gleichseitiger Durchschnittsfläche oder so wählen, daß die Fläche, die sich um den Cylinder legt, im Durchschnitt der Höhe des Dreiecks gleich ist.

die Axe durch zwei gegenliegende Ecken angenommen wird, liegen die übrigen Ecken in zwei Parallelebenen, bilden in jeder ein reguläres Fünfeck, so daß über jeder Seite des untern eine Ecke des obern liegt; die beiden Pole liegen in einem größten Kugelkreise.

Um also die horizontale Projection zu entwerfen, hat man ein reguläres Zehneck zu construiren, in welchem sich die Kanten des Ikosaëders nach Fig. 102 verbinden. Die Construction der zweiten Projection hängt von dem Abstand der gedachten Parallelebenen ab; hat man diese, so ist das weitere Verfahren ein einfaches Projiciren der Ecken in der ersten Projection in diese Ebenen, mittelst Normalen auf die Axe G^o.

Man beginne mit der Bildung des constituirenden Dreiecks kld_1 (Fig. 101.). Es ist nemlich die Kante kl parallel G^1, daher deren erste Projection ihre geometrische Länge. Wäre die Seite lk nicht rechtwinklich der Axe gestellt, so hat man zuvor die Drehung der ersten Projection dahin zu bewirken. Man bestimme die Lage der Axe $a_{,,}a''$ und ziehe die Normale b^1i. Da die Kante $a'b'$ parallel der zweiten Projectionsebene, so ist $a''b''$ die wahre Länge. Man schneide daher mit dem Radius, gleich einer Dreiecksseite, die Normale $b'i$ in b'', welcher Punct in der untern Parallelebene liegt, diese also bestimmt.*)

Zieht man d,h normal G^o, macht $b''i$ gleich $b'h'$ dann ist durch i auch die andere Parallelebene bestimmt, von welcher die Spitze $a_{,,}$ denselben Ab-

*) Diese Bestimmung wird auch durch das gleichschenkliche Dreieck feb erhalten, worin fe und b'f gleich der Dreiecksseite, b'e gleich der Sehne Fk ist, wenn man $a''b''$ parallel Fe abschiebt, wo dann auch $b''e$ parallel $a''f$ sein muß.

stand hat, wie a'' von der untern. Die Projicirung der Ecken und die Verbindungen dieser zu Kanten ergibt sich aus der Figur.

In Figur 102 hat die Kante ml die wahre geometrische Länge und c''d'' ist gleich b''i Fig. 101.

Es sind noch manche andere Hülfsmittel vorhanden, die zu der Construction der zweiten Projection führen, je nachdem die Drehung des Körpers angenommen wird. In dem Fall Fig. 101 ist z. B. a''b'' gleich der wahren Dreiecksseite; c⁰b'' gleich der mit ml parallelen Sehne b'c' in erster Projection u. a. m.

101. — Ein Dodekaëder besteht aus 12 regulären Fünfecken, die in einer Kugel eingeschrieben sind; die Ecken des Körpers liegen demnach sämmtlich in der Kugelfläche.

Aufgabe. Man soll ein Dodekaëder, welches mit einer Begrenzungsebene in der ersten Projectionsebene liegt, entwerfen (Figur 103.).

Die erste Projection liegt in einem Zehneck, welches man in einem größten Kugelkreis construirt. Die beiden mit der Horizontalebene parallelen Begrenzungsebenen sind Fünfecke, welche dem geometrischen constituirenden Fünfeck congruent, aber verwendet sind, so daß beide zusammen ebenfalls ein reguläres Zehneck bilden, dessen Ecken auf den Radien des äußern liegen. Die Verbindung der Kanten zeigt die Figur.*)

Um die zweite Projection zu zeichnen, wobei es zuerst auf die richtige Lage der Parallelebenen h'h,, und d''u'' ankommt, kann man sich verschiedener Mittel bedienen, je nachdem die Wendung des Kör-

*) Der um das innere Fünfeck umschriebene Kreis hat zum Radius die Seite des äußern Zehnecks.

pers gegeben ist. Sie finden sich zum Theil in den Constructionslinien angedeutet. So ist z. B. e''h'' u''w'' ein Rechteck, dessen Seiten e''h'' gleich der Seite des geometrischen Fünfecks, e''u gleich der Sehne h^1x^1 gleich ist, die parallel einer Seite des gedachten Fünfecks liegt. Die Ecken h'' und u'' bestimmen die Parallelebenen, die Mittellinie des Rechtecks zugleich die Kante i''o''. Der Reichthum an Hülfsmitteln, welchen diese Stellung gewährt, macht sie am geeignetsten zur Projection, selbst vor der Figur 104, wiewohl diese regelmäßiger erscheint, um alle andere Wendungen daraus ableiten zu können; bei ihr ist i^1o^1 parallel G^0, in Figur 104 ist x^1c^1 senkrecht G^0.

In Fig. 103 ist die zweite Projection folgendermaßen ausgeführt. Es sind die Eckpuncte e^1, k^1 und v^1 auf G^0 projicirt, aus v^1 der Punct e^1 nach n, aus w der Punct b^1 nach m übertragen, die projicirenden Normalen mm^0, nn^0 gezogen und mit dem Radius $v''n^0$ die Projicirende u^1u^0 in der Verlängerung u'' geschnitten. Dieser Punct bestimmt die Parallelebene d''u''. Schneidet man ferner aus v'' mit dem Radius $v''m^0$ dieselbe Projicirende in $h_{,,}$, so erhält man die andere Parallelebene w''h'', und dann ist noch $h_{,,}u^0$ gleich dem Abstand der Ebene d''u'' von F''w''; womit die Projection beendet ist, wenn man die Durchschnitte der übrigen Projicirenden zu Kanten verbunden hat.

Man hat nemlich damit der Projectionsebene eine solche Lage gegeben, daß sie mit der Kante e'h' oder e''h'' parallel ist, so daß diese herabgeschlagen erscheint.

Bei dieser Anordnung steht die Fläche v'u' auf der zweiten Projectionsebene normal und es muß daher die Linie v''u'' gleich der Höhe dieser Seitenfläche sein.

Von den Beziehungen der Hülfslinien und Ebenen wird man sich nur am Modell leicht überzeugen können; ein Gleiches ist es bei dem Ikosaëder.

Fünfter Abschnitt.

Von dem Durchdringen der Körper.

102. — Wenn ein Körper von einer unbegrenzten Ebene geschnitten wird, so bildet der Durchschnitt eine Ebene, in welcher alle Begrenzungslinien der Durchschnittsfigur liegen. Durchdringen sich aber zwei Polyëder, dann können die Seiten der zwar geradlinigen Durchgangsfigur in ganz verschiedenen Ebenen liegen.

Das Verfahren, die Seiten einer solchen Durchgangsfigur und somit die Seiten selbst zu bestimmen, beruhet darauf, daß man die Durchschnittslinien einer jeden einzelnen Fläche des ersten Polyëders mit allen beziehlichen Flächen des zweiten Polyëders aufsucht. Um aber den Durchschnitt von je zwei Flächen zu erhalten, kann man entweder die Grundschnitte der Ebenen benutzen, in denen diese Flächen liegen, oder auch die Durchschnittspuncte construiren, welche die Kanten der einen Fläche mit der Ebene der andern Fläche eingehen. Dabei werden benutzt die Aufgaben § 19 bis 24 und andere, wie § 16, 18, welche in Bezug auf die Aufgabe stehen.

103. — Practisch verfährt man im Allgemeinen nach folgender

Aufgabe. Die Projectionen a'b'c' und a''b''c'' sind die einer dreieckigen Fläche des einen Polyëders (Fig. 108), die Projectionen m'n'q's' und m''n''q''s'' gehören einer Fläche des andern Polyëders

an; die Flächen schneiden sich und ist deren Durchschnittslinie zu construiren.

Man verlängere a''b'' nach u auf der Axe, desgleichen b''c'' nach v, fälle die Normalen aus u und v und schneide sie durch die Verlängerungen von a^1b^1 und b^1c^1 in u_1 und v_1.

Es ist dann u^1v^1 der Schnitt der horizontalen Projectionsebene mit der (verlängerten) Ebene des Dreiecks.

Man verlängere ferner m''s'' nach s und q''n'' nach t, fälle aus s und t Normalen, die man durch die Verlängerungen von m^1s^I in s_1 und von n_1q_1 in t_1 schneidet. Hiedurch ergibt sich in der Linie s_1t_1 der Schnitt auf der ersten Projectionsebene von dem Viereck. Der Durchschnitt h_1 dieser ersten Schnitte ist ein Richtpunct der zu suchenden Durchschnittslinie der gegebenen Ebenen für die erste Projection.

Zu der Aufsuchung eines zweiten Richtpunctes construire man eine horizontale Ebene, deren Schnitt P'' ist. Man ziehe zu diesem Zweck P'' beliebig, verlängere a''b'' bis zu P'' in x'', fälle x''x' normal und schneide durch die Verlängerung von a'b'; desgleichen verlängere b''c'' nach y'' und schneide die Normale y''y' durch die verlängerte Seite b^1c^1 in y^1. Die Ebene des Dreiecks wird in dieser Linie x^1y^1 von der Ebene P geschnitten. Auf gleiche Weise findet man z^1r^1 als Durchschnittslinie der Viereckebene, und in dem Durchschnittspunct k^1 den zweiten erwähnten Richtpunct, wodurch die Lage des Durchschnitts von dem Dreieck und Viereck in erster Projection bestimmt ist; von dieser Richtung ist aber nur o^1e^1 beiden Ebenen gemein, daher die eigentliche Durchschnittslinie.

Die zweite Projection läßt sich zwar durch Normalen aus der ersten übertragen, doch thut man

besser, sie zu construiren, indem man h, nach h auf G^o, k, nach k'' auf P'' projicirt und hk'' zieht, in welcher Richtung das gemeinschaftliche Stück o''e'' der Durchschnitt der Ebenen in der zweiten Projection ist.

104. — Ist auf solche Weise bei dem Durchdringen zweier Körper die Durchschnittslinie zweier Flächen gefunden worden, so behandelt man zwei andere Flächen auf gleiche Weise. Man hat dabei eine gewisse Ordnung der Folge einzuhalten, ohne welche man, wo nicht in Verwirrung geräth, doch mancher vergeblichen Arbeit ausgesetzt ist.

Es sei z. B. ein dreikantiger Raumwinkel gegeben (Fig. 109), gebildet von dem Fünfeck a, dem Dreieck b und dem Viereck c. Dieser durchdringt einen vierkantigen körperlichen Winkel, dessen Seiten die Dreiecke b^1, c^1 und die Vierecke a^1 und d^1 sind.

Zuerst bestimme man den Durchschnitt mn der Flächen a und a^1. Da nun der Punct n bereits in der Ebene a^1 liegt, bestimme man nun den Durchschnitt von a^1 und b, wovon nur no diesen beiden Flächen gemein ist. Man kennt in der Fläche b sonach schon den Punct o, sucht daher jetzt den Durchschnitt von b und b^1, welcher in der Richtung o,bb^1 liegt, aber nur in oq gemeinschaftlich ist.

So fährt man bis zu dem Durchschnitt ps fort und verbindet endlich pm. Die Durchdringungsfigur wird sonach in mnoq.... erhalten und durch die durchbrechende Spitze des dreikantigen Körperwinkels abc bedingt, wogegen die Spitze des vierkantigen Körperwinkels als herausgeschnitten oder in das Innere des erstern fallend gedacht werden kann.

Zur Controle kann dienen, daß man auch von der letzten Seite der Durchschnittsfigur zwei Puncte sucht, deren Verbindung verlängert durch m gehen muß, wenn richtig operirt worden ist.

105. — **Aufgabe.** Es durchdringen sich eine dreikantige Pyramide $abcs^1$ und ein vierkantiges Prisma von der Grundebene mnde; es sollen die Durchschnittsfiguren gefunden werden.

Die Folge, in der operirt werden muß, ist folgende: aus dem Durchschnitte der Flächen

abs^1 und ded_1e_1 folgt die Linie ou
abs^1 „ eme_1m_1 „ „ „ ut
acs^1 „ eme_1m_1 „ „ „ tx
cas^1 „ eme_1m_1 „ „ „ xs
cas^1 „ ded_1e_1 „ „ „ so

Diese Linien begrenzen die Figur des Eintritts der Pyramide in das Prisma. Die Figur des Austritts der Pyramide ergibt sich auf gleiche Weise in der Folge wie nachstehend:

Die Flächen abs^1 und ndn_1d schneiden sich in ik
bcs^1 „ ndn_1d^1 „ „ „ kl
bcs^1 „ mnm_1n^1 „ „ „ lg
cas^1 „ mnm_1n^1 „ „ „ gr
cas „ ndn_1d^1 „ „ „ ri

Diese Linien zu construiren, lege man eine Hülfsebene F, welche beide Körper parallel G^1 schneidet. Um ik zu erhalten, fälle man die Normalen aus den Durchschnittspuncten 2, 3, 4 und 5 der beziehlichen Kanten mit F nach 2_1, 3_1, 4_1 und 5_1, verbinde 2_13_1 und 5_14_1 und verlängere bis zum Durchschnitt w. Verlängere dann auch die Kanten ab und nd, die sich in w^1, einem zweiten Durchschnittspunct, vereinigen; es ist somit das Stück ik der Verbindungslinie ww^1, welches zwischen den Kanten as^1 und bs^1 liegt, eine Linie der Durchschnittsfigur.

Man suche nun kl, also den Punct l, da k bereits gefunden ist. Man verlängere bc und dn nach y, ziehe ky, auf welcher das Stück kl durch die Kanten bs^1 und nn_1 abgeschnitten wird.

Da nun l bestimmt ist, suche man g. Dieser Punct liegt in der Richtung von $s_1 l$; der Punct s_1 aber in der Verlängerung von bc, und mn und lg zwischen den Kanten cs^1 und nn_1.

Um r, wegen gr zu finden, verlängere mn und ac zum Durchschnitt u, und ziehe u,g bis r auf der Kante nn_1.

Der Punct i ist bereits gefunden, daher noch ri zu verbinden, womit die Ausgangsfigur geschlossen ist. Zu der andern Durchschnittsfigur suche man ou, wozu die Durchgangspuncte u_1 und r_1 nöthig sind. Verlängert man 2,3, und 5,6,, so erhält man den Punct u_1, durch die Verlängerung von ab und de aber r_1 und somit die Richtlinie $r_1 u_1$, auf welcher ou durch die Kanten os^1 und ee_1 abgeschnitten wird.

Die Linie ut ergibt sich mittelst des Punctes h, wenn ab und me_1 verlängert wird, parallel $n_1 d_1$ zwischen den Kanten bs^1 und ee_1.

Man suche x, wozu der Durchschnitt q von me_1 und bc verhilft, indem man q mit t verbindet, wo dann x der Durchschnitt mit cs^1 ist.

Der folgende Punct s wird gefunden, wenn man ac und me_1 nach p verlängert und durch den Durchschnitt px zieht; er liegt auf der Kante ee_1.

Durch die Verbindung s mit o ist die Durchschnittsfigur des Eingangs der Pyramide in das Prisma hergestellt.

106. — Für manche Gewerbe ist es nützlich, dergleichen Durchdringungsgrenzen in geometrischer Figur auf die einzelnen Flächen (Fig. 111 u. 112), die das Netz der Körper bilden, überzutragen, um dadurch die Ausschnitte in den einzelnen Seiten, wenn sie etwa aus Blech, Pappe 2c. bestehen, mit Sicherheit bewirken zu können.

Hierzu ist nöthig, daß das geometrische Netz der Körper, durch Herabschlagen der einzelnen Kanten in der Projection, gezeichnet werde. Liegt der Punct des Ausschnittes auf einer Kante, so geschieht das Herabschlagen einfach nach § 26, 27, 28, indem das Stück der Kante bis zu jenem Punct herabgeschlagen wird. Liegt aber der Punct in Mitten einer Ebene, wie g_1g^1 Fig. 110, so hat man gg_1 und $g'g_{,,}$ parallel mit einer Kante mm_1 in beiden Projectionen zu ziehen und sowohl gg_1 als g_1m herabzuschlagen, um durch die gefundenen Coordinaten gg_1 und g_1m Fig. 111 den Punct g bestimmen zu können.

In den Figuren 111 und 112 ist nach diesem Verfahren die Ausschnittsfigur und zwar in Figur 111 in dem Netz des Prisma's und in Figur 112 in dem der Pyramide und damit zu jedem Körper die Schablone gezeichnet worden, nach welcher jeder Theil zugerichtet werden muß, wenn die Körper, wie verlangt, in einander passen sollen.

Auf einem massiven Körper, den ein anderer durchsetzen soll, hat man auf diese Weise die Schablonen (panneaux, patrons) zu fertigen, womit man die Aufzeichnung auf das massive Material, Holz, Stein ꝛc. bewirkt.

Man bemerke, daß zwei beziehliche Seiten von beiden Durchschnittsfiguren sich verlängert immer auf einer Kante der Körper schneiden müssen, diese Eigenschaft daher zur Controle benutzt werden kann.

Wenn der eine Körper von dem andern völlig umschlossen wird (pénétration), so entstehen zwei von einander getrennte Durchschnittsfiguren. Wird der eine Körper nicht ganz von dem andern eingeschlossen, tritt vielmehr an einer oder mehreren Stellen seitwärts aus ihm heraus (arrachement), dann

vereinigen sich die beiden Durchschnittspolygone des Ein- und Ausgangs zu einen einzigen Polygon.

107. — **Aufgabe.** Es schneiden sich zwei dreiseitige Pyramiden $a^1b^1c^1s$ und $d^1e^1f^1t$; es sind die Durchschnittsfiguren zu zeichnen.

Man beginne mit Aufsuchen der Durchschnittslinie nq (Fig. 113), welche die Ebenen abs und eft gemeinschaftlich haben. Die Grundschnitte dieser Ebenen sind a^1b^1 und e^1f^1 auf der ersten Projectionsebene. Man verlängere e^1f^1, bis sie den andern Schnitt a^1b^1 schneidet; der Durchschnittspunct ist n^1. Dieser Punct ist der erste Durchgang der verlängerten Durchschnittslinie n^1q^1 der erwähnten Ebenen, und es ist ein zweiter Punct x^1 aufzusuchen, um die Lage der Linie selbst bestimmen und deren Projection zeichnen zu können.

Diesen Punct zu finden, verbinde man die beiden Spitzen s,t der Pyramiden und denke durch diese Verbindungslinie eine Ebene E, welche die beiden behandelten Ebenen a^1b^1s und e^1f^1t schneidet. Wenn man nun $s''t''$ nach s^2, aus s^2 eine Normale s^2s^1 und die Richtung e^1t^1 zieht, so ergibt sich in dem Durchschnitt s^1 der erste Durchgang der Linie s,t. Man nehme dann einen Punct h^1 beliebig und ziehe E^1 von h^1 nach s^1, wodurch die beiden Schnitte e^1f^1 und a^1b^1 in h^1 und g^1 geschnitten werden, und ziehe noch g^1s^1 und h^1t^1. Die erste schneidet den verlangten Punct x^1 auf h^1t^1, so daß nun die Richtung n^1x^1 und mit ihr die Durchschnittslinie der beiden Ebenen gefunden ist, welche durch die beiden Kanten e^1t^1 und f^1t^1 abgegrenzt wird.

Man wende sich nun zu den Ebenen $a^1b^1s^1$ und $d^1f^1t^1$, um deren Durchschnittslinie p^1q^1 zu projiciren. Durch die vorhergehende Operation ist

bereits der Punct q^1 bestimmt; die Richtung der Durchschnittslinie q^1p^1 hängt von dem Punct p_1 ab, welcher der Durchschnitt von der Kante a^1b^1 und der Verlängerung von d^1f^1 ist. Die Durchschnittslinie q^1p^1 wird auf der Richtung p_1q^1 durch die Kanten d^1t^1 und f^1t^1 abgeschnitten. Die dritte Durchschnittslinie der Flächen $a^1b^1s^1$ und $d^1e^1t^1$ wird projicirt durch p^1n^1, deren Endpuncte bereits gefunden sind.

Es ist ferner die Durchschnittsfigur $r^1v_1z_1$ des Ausgangs der Pyramide zu finden, welche in der Seitenebene $a^1c^1s^1$ der andern Pyramide entsteht. Die Ebenen $a^1c^1s^1$ und $e^1f^1t^1$ schneiden sich in r^1v^1, und r_1 ist der erste Durchgang der beziehlichen Linie. Er liegt in dem Durchschnittspunct der ersten Schnitte von a^1c^1 und e^1f^1 und gibt die Richtung der Durchschnittslinie r^1v^1; es wird daher noch ein zweiter Punct y^1 zu Bestimmung dieser Richtung nöthig, der ebenfalls mittelst der Ebene E gefunden wird.

Die Ebene E schneidet nemlich die Ebene $a^1c^1s^1$ in einer Linie, deren erste Projection m^1s^1 ist, die Ebene $e^1f^1t^1$ in einer Linie, deren erste Projection h^1t^1 bereits benutzt wurde; der Durchschnittspunct dieser beiden Projectionen ist der gesuchte Punct y^1 und das Stück r^1v^1 der Richtung r^1y^1 zwischen den Kanten e^1t^1 und f^1t^1 ist die erste Projection der verlangten Durchschnittslinie rv.

Die Durchschnittslinie der Ebenen $d^1f^1t^1$ und $a^1c^1s^1$ ist die Linie vz, deren erste Projection zu suchen ist. Der Punct v^1 ist bereits bestimmt, die Linie selbst liegt in der Richtung v^1v_1 und wird durch die Kanten d^1t^1 und f^1t^1 begrenzt; der Punct v^1 aber ist der Durchschnittspunct von der Verlängerung d^1f^1 mit a^1c^1, womit also diese Seite des Durchgangsdreiecks gefunden ist.

Die dritte Seite des Dreiecks liegt endlich zwischen den bereits bestimmten Puncten r^1z^1. Demnach ist das Dreieck $n^1q^1p^1$ die Eintrittsfigur, das Dreieck $r^1v^1z^1$ die Ausgangsfigur der einen Pyramide in den Seiten $a^1b^1s^1$ und $a^1c^1s^1$ der andern; die Seitenebene $b^1c^1s^1$ wird von der ersten Pyramide nicht getroffen.

Man bemerke, daß die Seiten der Durchschnittsfiguren zweier Pyramiden, die sich durchdringen, sich verlängert immer auf den Seiten oder deren Verlängerungen der einen Pyramide schneiden, was als Controle zu Prüfung des Verfahrens benutzt werden kann; zuweilen bietet es eine Hülfe bei Bestimmung der Richtung einer Seite der Durchgangsfigur, doch darf man sich ihrer nur bedienen, wenn die Richtpuncte der bekannten Verlängerung nicht so nahe beisammen liegen, daß die Bestimmung unsicher wird.

Das Netz mit den darauf verzeichneten Durchgängen wird wie § 106 durch Herabschlagen der Kanten und Durchschnittspuncte bestimmt.

108. — Ein ähnliches Beispiel mit verändertem Verfahren stellt folgende Aufgabe auf.

Eine dreikantige Pyramide $a^1b^1c^1s^1$ wird von einer zweiten $d^1e^1f^1t^1$ durchdrungen (Fig. 114); letztere ruht mit der Grundkante d^1e^1 auf der ersten Projectionsebene; man soll die Durchschnittsfiguren projiciren.

Man suche den Durchgang n^1 der Kante d^1t^1 in der Ebene $a^1c^1s^1$, indem man aus dem Durchschnitt g^1 eine Normale g^1g^2 auf G^0 zieht, mit einer zweiten aus dem Durchschnitt h^1 die Kante c^2s'' schneidet und g^2h'' zieht. Die letztere Linie wird die Kante d^2t'' in einem Punct n'' schneiden, welches die zweite Projection des Punctes n ist, woraus die erste n^1 bestimmt werden kann.

Den Durchgangspunct der Kante f^1t^1 in der Ebene $a^1c^1s^1$ zu finden, ziehe man aus den Durchschnittspuncten k^1 und l^1 die Normalen auf die Axe k^1k^2 und $l'l''$. Die Verbindungslinie k^2l'' schneidet die Kante $f''t''$ in einem Puncte p'', wodurch die Durchschnittslinie $n''p''$ gefunden ist und auf die erste Projectionsebene übergetragen werden kann. Zur Bestimmung des Punctes m auf der Ebene $d^1c^1t^1$, welcher in der Durchschnittslinie dieser und der Ebene $a^1c^1s^1$ liegt, und in welchem die Kante a^1s^1 die Ebene $d^1c^1t^1$ schneidet, nehme man die zweite projicirende Ebene der Kante a^1s^1 zu Hülfe. Man fälle nemlich aus dem Durchschnittspunct r'', wo die Kanten d^2t'' und a^2s'' sich treffen, eine Normale auf d^1t^1, eine andere aus dem Durchschnittspunct v'' der Kanten e^2t'' und a^2s'' nach e^1t^1 und verbinde die Fußpuncte v^1r^1. Hierdurch wird die Kante a^1s^1 in dem gesuchten Punct m' geschnitten. Die zweite Projection ergibt sich in m'', es sind die Durchschnittslinien np und mn in beiden Projectionen gefunden und man kann einen der Puncte, der sich mit ihnen verbindet, z. B. q^1, aufsuchen, wozu der bereits bestimmte Punct v', v'' benutzt wird. Man ziehe nemlich aus dem Durchschnittspunct u'' der Kanten $f''t''$ mit a^2s'' die Normale $u''u'$ und verbinde deren Durchschnittspunct und die Kante $f't'$ mit dem Punct v'. Diese letztere Linie schneidet auf der Kante $a's'$ den gesuchten Punct q', dessen zweite Projection q'' ist, u. s. w.

109. — **Aufgabe.** Ein normales Prisma werde von einer Pyramide durchdrungen; es sind die Durchgangsfiguren zu projiciren (Fig. 115).

Das Prisma ist achtseitig und steht normal auf der ersten Projectionsebene, sein erster Schnitt ist daher das Achteck A'; die Axe der sechsseitigen

Pyramide liegt parallel der ersten Projectionsebene, schräg der zweiten. In dieser Stellung wird die Projicirung sehr einfach und ist in der Figur als bereits ausgeführt angenommen.

Die Kante s'd' der Pyramide durchdringt die Seite w'n' des Prisma in z'; ihr Durchgangspunct in der zweiten Projection ist daher der Durchschnitt γ, der Normalen z'γ, und der Kante s''c''. Die Kante s'e' hat ihren Durchgangspunct auf der n'w' des Prisma's, wie die vorige, also im Durchschnitt dieser Kante mit der Normalen in φ, der zweiten Projectionsebene. Die Seite s'f' nimmt ihren Durchgang auf der Seite s'f' des Prisma's in t' und der Durchgangspunct in zweiter Projection ist daher y''; ebenso ist y' die erste Projection und δ die zweite des Durchgangs der Kante s'q' der Pyramide.

Die Ausgangsfigur fällt auf die in der zweiten Projection unsichtbaren Seiten des Prisma's und ist durch punctirte Linien angegeben. Sie wird auf gleiche Weise durch die Durchgangspuncte der Kanten bestimmt.

110. — **Aufgabe.** Man soll die Curve construiren, nach welcher sich zwei Cylinderflächen durchdringen.

Die gegebenen Cylinderflächen seien **A,A'** und **B,B'**. Man wähle einen beliebigen Punct **m',m** und ziehe durch ihn zwei Parallelen mit den Seiten (Erzeugungslinien) der Cylinder.

(Fig. 116) Diese Linien bestimmen eine Ebene, welche den Cylinder A,A' nach den Erzeugenden **a,a** und den Cylinder B,**B'** nach den Erzeugenden b,b schneiden. Die Linien a,a, b,b liegen mit den erst construirten in der Ebene **P** und bestimmen vier Puncte **uuuu** der gesuchten Durchschnittscurve.

Eine zweite und dritte Ebene P' und P'', welche man mit P parallel legt, bestimmen jede vier andere Puncte der Curve, und so lassen sich durch Wiederholung des Verfahrens soviel Puncte der Curve finden, als man zu genauer Zeichnung derselben nöthig erachtet.

Es ist anzurathen, nur eine Ebene auf einmal zu legen und die durch sie zu erlangenden Puncte zu bestimmen, um sich durch viele Linien nicht zu verwirren; man wählt dazu nach und nach andere Ebenen, wodurch die Hauptpuncte der Curve erlangt werden und bestimmt die untergeordneten Biegungen zuletzt.

Die Ebene P' berührt den ersten Schnitt des Cylinders B in dem Puncte b' und schneidet den des Cylinders A in a'a', in ihr müssen die Puncte u'u' liegen, in welchen die gesuchte Curve von den Erzeugenden des Cylinders AA' berührt wird. Eben so erhält man durch die Ebene P'' die Puncte u''u'', worin die Erzeugenden des Cylinders BB' die gesuchte Curve berühren.

Die zweckmäßige Wahl der schneidenden Ebenen erleichtert das Aufsuchen der Curve sehr. Durch Ebenen, welche nur eine der beiden Cylinderschnitte durchschneiden, lassen sich, wie begreiflich, keine Durchschnittspuncte erhalten.

Das beschriebene Verfahren läßt sich vereinfachen, wenn man nach folgender Aufgabe verfährt.

111. — Aufgabe. Es schneiden sich zwei normale Cylinder C und K, bestimmt durch die Radien ihrer Grundebenen, den normalen Abstand ihrer Axen und durch den Winkel α, welchen die Cylinderaxe K mit einer Ebene bildet, die auf der von C senkrecht steht; man soll die Durchschnittscurve construiren.

Man lege den Cylinder C auf die erste Projectionsebene so, daß derselbe normal der zweiten Projectionsebene steht. Sein zweiter Schnitt ist dann der Kreis C'', congruent der Grundebene und die Axe G^0 ist Tangente dieses Kreises; der zweite Durchgang der Cylinderaxe ist b^2, und deren erste Projection $a'b'$ steht in dem Berührungspunct normal der Projectionsaxe. Die Axe cd des zweiten Cylinders K wird, nach der erfolgten Drehung des Systems, denselben Winkel α mit der zweiten Projectionsebene bilden, den sie nach der Bestimmung mit der, auf der Axe von C normalen Ebene einging. Deren zweiter Durchgangspunct ist d^2 und deren erste Projection die Linie c^1d^1.

Man stelle die beiden Projectionen der Cylinder her; verlängere dazu b^1b^2, nehme b^2c^2 gleich dem normalen Abstande der Cylinderaxen, ziehe c^2d^2 parallel G^0, nehme den Punct d^1 beliebig*), trage den Winkel α in $b^1c^1d^1$ und ziehe δ^1d^1 normal G^0. Man hat dann in c^1d^1 und c^2d^2 die Projectionen der Axe des Cylinders K; sie ist parallel der ersten Projectionsebene und ihr zweiter Durchgang ist der Punct d^2.

Man ziehe ferner e^1g^1 normal c^1d^1, mache $x^1e^1 = x^1g^1$ gleich dem Radius des Cylinders K, ziehe e^1f^1 und g^1h^1 parallel c^1d^1 und errichte auf der Projectionsaxe die Normalen f^1f^2 und h^1h^2. Da die Linien e^1f^1 und g^1h^1 die ersten Projectionen der begrenzenden Seiten des Cylinders K, und f^2h^2 deren zweite Durchgänge sind, ergibt sich in f^2h^2 die große Axe der Ellipse, welche den zweiten Schnitt des Cylinders ausmacht, die kleine Axe in dem Durchmesser des Cylinders, und läßt sich damit die Ellipse construiren.

*) Indem die Cylinder unbegrenzt gedacht werden.

Aus diesen Projectionen suche man nun die der Curven. Man theile die Peripherie des Kreises C'' in n (etwa 32) Theile, so daß t^2 ein Theilpunct werde; l^2 und n^2 mögen zwei dieser Theilpuncte in gleichem Abstand von t^2 sein*). Man lege die Ebene F, deren zweiter Schnitt parallel der ersten Projectionsebene; der Cylinder C wird durch sie in l^2 und n^2, der Cylinder K in q^2s^2 geschnitten und die ersten Projectionen dieser Durchgänge sind k^1l^1 und m^1n^1, bei dem zweiten Cylinder aber p^1q^1 und m^1s^1.

Die Puncte k^1, p^1, m^1, v^1, in welchen sich die ersten Projectionen der Seiten schneiden, sind die ersten Projectionen von vier Puncten der Durchschnittslinien beider Cylinder.

Die zweiten Projectionen der Puncte k und p liegen in l^2, die der Puncte m und v in n^2. Auf gleiche Weise verschafft man sich soviele Puncte, als zu genauer Zeichnung der Durchschnittscurve nöthig werden.

Um die Durchschnittsfiguren beider Cylinder mit dem Cylinder C abzuwickeln, denke man den Cylinder längs der Seite, deren Durchgang t^2 ist, aufgeschnitten und in die erste Projectionsebene halb rechts, halb links von b^1 niedergelegt.

Die geschlitzte Seite fällt dann in die Linien t'' und t_2. Man theile nun den Abstand $t''t_2$ ebenfalls in n (hier 32) gleiche Theile und ziehe durch die Theilpuncte Normalen, mache n^2m gleich n^1m^1 und n^2v gleich n^1v^1 oder ziehe aus den Puncten der Curve Parallelen m^1m und v^1v mit der Axe. Ebenso erhält man die Puncte auf den

*) Die gleiche Theilung wird der Bequemlichkeit wegen nöthig, wenn die Curve herabgeschlagen werden soll.

andern Theillinien und kann die abgewickelte Curve einzeichnen.

112. — Alle Durchschnittscurven zweier Cylinderflächen sind Curven von doppelter Krümmung. Wie in den vorhergehenden Aufgaben Kreiscylinder behandelt worden, so ist auch bei Cylindern von beliebigen Leitlinien zu verfahren. Wenn die gegebenen Cylinderflächen einander in paralleler Lage durchdringen, so sind die Durchschnitte zwei Erzeugende, die auf den Puncten stehen, worin sich die Grundschnitte der Cylinder schneiden.

Man benutzt dieses Verhalten, um die Durchgänge einer krummen Fläche oder Linie, deren Erzeugungslinien parallel der Cylinderaxe sind, durch die Cylinderfläche zu finden.

113. — **Aufgabe.** Es sei die Leitlinie einer solchen krummen Fläche in zweiter Projection $b^2m^2b^2$, und die Fläche in erster Projection, deren Parallelebene die erste Projectionsebene ist, sei b^1b_1, b^1b_1 (Fig. 120).

Man nehme in letzterer beliebige Puncte $1, m^1$, $2, m_1, 3 \ldots$ an und lege durch sie Parallelen mit der Seite des Cylinders.

Dies sind Erzeugungslinien eines zweiten Cylinders, deren horizontale Schnitte den Schnitt des ersten Cylinders durchdringen. Zieht man durch diese Puncte die Erzeugungslinien c^1m^1, c_1m_1 und c^2m^2, $c''m''$, so müssen die Durchschnittspuncte derselben mit der Curve bb die gesuchten Durchgangspuncte der Curve mit der gegebenen Cylinderfläche sein.

114. — **Aufgabe.** Ein gerader Cylinder und ein Kegel durchdringen sich, man soll die Durchschnittslinien construiren (Figur 121).

Man schneide beide Flächen durch ein System von Ebenen, welche mit der Erzeugenden der Cylinderfläche parallel sind, bei dem Kegel durch dessen Spitze gehen. Die Durchschnitte dieser Ebenen mit dem Kegel und mit dem Cylinder werden gerade Linien sein; die Linien selbst sind Seiten, und deren Durchschnitte bestimmen verschiedene Puncte, welche der Curve angehören.

Es sei nun C^1 der erste Schnitt eines normalen Cylinders, K' der erste Schnitt des Kegels, dessen Spitze in beiden Projectionen $s's''$.

Man ziehe $s''r^2$ und $s'r^1$ parallel den Seiten des Cylinders, fälle die Normale r^2r^1, so ist r^1 der erste Durchgang der Linie rs im Raum. Zieht man E^1, so ist diese Linie als erster Schnitt einer Ebene zu betrachten, die durch rs geht und den Kegel in zwei Seiten schneidet, deren erste Durchgänge c' und d' sind; den Cylinder aber schneidet sie ebenfalls in zwei Seiten, welche durch g' und h' gehen. Zeichnet man diese Seiten in beiden Projectionen, so entstehen vier Durchschnittspuncte q', p', t', n' und q'', p'', t'', n'', durch welche die Durchschnittscurve unfehlbar gehen muß. Legt man noch andere Schnitte, wie z. B. F', so ergeben sich durch jeden vier andere Puncte der Curve, wodurch endlich die Curve bestimmt wird.

115. — **Aufgabe.** Es durchdringen sich zwei Kegel, deren erste Schnitte K' und C', die Projectionen der Spitzen s', s'' und t', t'' sind; man soll die Durchschnittscurven projiciren (Fig. 122).

Man verbinde die Spitzen $s't'$, $s''t''$ und suche den ersten Durchgang s_1 der Verbindungslinie, der hier auf die Normale s^1x fällt, weil $s't'$ über G^0 von $s''t''$ geschnitten wird. Man lege durch s_1 eine Ebene E, deren erster Schnitt E^1, die den Kegel K^1

in den Projectionspuncten a^1b^1, den Kegel C^1 in g^1h^1 schneidet; zieht man die in diesen Puncten stehenden Seiten b's', a's' und h't', g't', so geben deren Durchschnitte n'p'q'v' vier Puncte der Curve. Eine andere Ebene **F** gibt eine gleiche Anzahl Puncte und so läßt sich durch Verfolgung dieses Verfahrens die Curve bestimmen; die Wendepuncte der Curve liegen aber in den Durchschnitten der projicirten äußern Seiten der Kegel. Leicht ist es, die zweite Projection des Durchschnittes auf dieselbe Weise mittelst der Ebenen E, F... oder aus der ersten Projection abzuleiten.

116. — **Aufgabe.** Es ist eine Kugel A^1A^2 gegeben und sollen die Durchgangspuncte einer Linie **P** gesucht werden (Fig. 123).

Man lege durch P^1, P^2 eine der ersten Projectionsebene normale Ebene, deren Grundschnitt P^1d^1 ist. Hierdurch wird die Kugel in einem senkrechtstehenden Kreise geschnitten, dessen erste Projection mit dem Schnitt P^1d^1 zusammenfällt, dessen zweite Projection die Ellipse m^2m^2 ist. Die Ellipse kann durch die bekannte Construction, besser aber so gezeichnet werden, daß man die Ebene **P** um die Drehungsaxe δ^1d^2 bewegt denkt, bis sie in die mit der Axe G^0 parallele Lage P'' zu liegen kommt. Hierdurch kommt die gegebene Richtung in a''a,, zu liegen und der Durchschnitt der Kugel mit der Ebene **P** erscheint als Kreis **C**, welcher von a''a, in den Puncten m'',m'' durchschnitten wird. Projicirt man diese Puncte nach m,m und denkt die Ebene in ihre frühere Lage P^1d^1 zurückgedreht, dann ergeben sich die Puncte m^1, m^1 in welchen die Linie **P** durch die Kugelfläche geht, woraus die zweite Projection leicht zu bestimmen ist.

117. — **Aufgabe.** Die Durchdringungscurve eines Cylinders mit einer Kugel zu construiren (Fig. 124a).

Man lege parallel mit der Erzeugenden des Cylinders B' eine Hülfsebene pu, die normal auf der ersten Projectionsebene steht und ihren zweiten Schnitt in uu'' hat.

Diese Ebene durchschneidet den Cylinder nach den zwei Erzeugenden (Seiten) b'u und b''u'', welche auf die Ebene p''u'' projicirt und in die erste Projectionsebene herabgeschlagen, in $b_{,,,}$ $b_{,,}$ zu liegen kommen.

Der Durchschnitt der Kugel mit dieser neuen Ebene ist der Kreis $A_{,,}$ und die Durchschnitte dieses Kreises mit $b_{,,,}$ $b_{,,}$ geben vier Puncte $m_{,,}$ der gesuchten Durchschnittscurve.

Werden diese Puncte in ihre frühere Lage zurückgeschlagen, so ergeben sich die ersten Projectionen derselben in m'.... und hieraus die zweiten Projectionen.

Man sieht, daß die Aufgabe auf die § 111 zurückgeführt worden: den Durchgang einer Linie (Seite des Cylinders) durch die Kugel zu bestimmen.

In den folgenden Aufgaben mögen noch einige specielle Fälle, die im practischen Zeichnen häufig vorkommen, abgehandelt werden. Es ist immer anzurathen, daß sich der ausübende Zeichner zuvor mit der allgemeinen Behandlung aller solcher Aufgaben bekannt macht, damit ihm bei irgend einer vorkommenden Aufgabe, die das Gebiet des Gewöhnlichen überschreitet, ein sicheres Anhalten zu Behandlung des Falles vorliege.

118. — **Aufgabe.** Eine Kugel wird von einem Prisma durchdrungen, man soll die Durchschnittscurve finden (Fig. 124b), wenn der Mittelpunct der Kugel in der Axe des Prisma's liegt.

Der erste Schnitt des regulären sechseckigen Prisma's sei d'e'f'....., die Projection der Axe

und des Kugelcentrums auf der Horizontalebene ist c'. Unter diesen Voraussetzungen schneiden die Seitenflächen des Prisma's die Kugel in gleichen Kreisen.

Daher schneidet die Ebene durch a,b,, worin die Seitenebene c'F' des Prisma's liegt, von der Kugel eine Calotte ab, welche zur Grundebene einen Kreis von dem Durchmesser a,b, hat und in der zweiten Projection durch den Kreis ae''F''b... projicirt wird; von ihm sind blos die Bogen e''f'' und l''m'' sichtbar. Ein Gleiches ist es mit den andern prismatischen Flächen, nur daß diese Bögen hier elliptische Form annehmen, weil die Seitenflächen gegen die Verticalebene verwendet sind. Die große Axe cg der Ellipse, dessen Theile sie sind, ist gleich dem Durchmesser des Kreises, von dem sie abstammt; die kleine Axe aber ist die Projection ef des Schnittes e,f, in der ersten Projection. Da von dieser Ellipse nur die Bogen d''e'', f''g''.... gebraucht werden, lassen sich diese sehr bequem finden, indem man e''f'' und f''g'' in eine gleiche Anzahl Theile theilt und die durch sie gezogenen Höhen in dem mittlern und Nebenbögen gleich macht. Die untern Bögen sind den obern vollkommen gleich.

119. — **Aufgabe.** Eine Kugel wird von einem Cylinder durchdrungen; der Mittelpunct liegt außer der Axe des Cylinders. Man soll die Durchdringungscurve finden (Fig. 125).

Die horizontale Projection der beiden Körper ist in **A'C'B'** und die Verticale in **ACB** gegeben.

Um die Curven zu zeichnen, legt man eine Ebene c^1d^1 parallel der zweiten Projectionsebene. Diese wird den Cylinder in zwei Erzeugungslinien (Seiten) **G'H'** schneiden, deren zweite Projection in den Linien **G'G** und **H'H** liegt.

Die Kugel aber wird in einem Kreise geschnitten, dessen erste Projection der Durchmesser c^1d^1 ist. In der zweiten Projectionsebene beschreibe man diesen Kreis aus C in cMd. Die Durchschnittspuncte der Linien GG', HH' sind vier Puncte der Curve. Jede den Cylinder berührende Ebene a'b' e'f' bestimmt vier andere Puncte M'F'E'L auf der Axe des Cylinders, wovon die M und L auf der Rückseite desselben liegen.

Die Ebene D'N' durch die Axe des Cylinders schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen zweite Projection die Erzeugungslinien D'D und N'N in den Puncten D,N,g,h schneidet.

In diesen Puncten werden die genannten Erzeugungslinien von den Durchschnittscurven berührt; sie helfen daher die Curven bestimmen.

Bei größern Zeichnungen kann man mehr Durchschnittsebenen annehmen, um mehr Puncte der Curve zu erhalten, die dann aus freier Hand verbunden werden.

120. — **Aufgabe.** Die Durchschnittscurve eines Kegels mit einer Kugel zu finden (Fig. 126), deren Mittelpunct außer der Kegelaxe liegt.

Es seien A',B' und A''B'' die Projectionen der beiden Körper, welche sich durchdringen.

Man lege durch die Spitze des Kegels eine normale Ebene p, welche auch die Kugel schneidet. Der Kegel wird dadurch in den Erzeugenden b, b'', b'' geschnitten, welche, indem man sie um den Schnitt der Ebene p gedreht denkt und in die erste Projectionsebene niederlegt, nach $b_{,,}b_{,,}$ fallen. Der in die gleiche Ebene niedergelegte Schnitt der Kugel mit der Ebene p ist der Kreis A'', und die vier Puncte m''' und $m_{,,,}$ gehören der gesuchten Curve an. Denkt man die Ebene p zurück in ihre vorige

Lage, so kommen diese Puncte in m', m,... zu liegen und deren zweite aus ihnen abgeleitete Projectionen sind m''.. m,,..

121. — Wenn der erste oder zweite Schnitt des Kegels ein Kreis ist, so läßt sich die Hülfsebene parallel mit einer der Projectionsebenen nehmen; dann sind die Durchschnitte Kreise, die mit der Projectionsebene parallel sind.

Dieser specielle Fall ist in nachstehender Aufgabe ausgeführt.

Aufgabe. Eine Kugel ist von einem senkrechtstehenden Kreiskegel durchdrungen; man soll die Curven zeichnen.

Es sei DS die Axe des Kegels, deren horizontale Projection der Punct S^1 (Fig. 127a). Der Kreis vom Mittelpunct S^1 ist der erste Schnitt des Kegels, der Kreis, dessen Mittelpunct c^1 ist, die erste Projection der Kugel. Desgleichen ist ABS die zweite Projection des Kegels und der Kreis C die zweite Projection der Kugel.

Um nun in beiden Projectionen die Curven zu zeichnen, in welchen sich die Körperflächen beim Durchdringen gegenseitig anschließen, lege man eine Ebene ab parallel der ersten Projectionsebene, welche beide Körper durchschneidet. Diese Ebene wird die Kugel in einem Kreise schneiden, dessen Durchmesser ab und dessen erste Projection $a^1F^1b^1$ ist, den Kegel aber in einem zweiten vom Durchmesser cd, dessen erste Projection der Kreis $c^1F^1e^1$ ist.

Man beschreibe also aus c^1 mit dem Halbmesser $ci = \frac{1}{2}ab$ einen Kreis, einen andern aus S^1 mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}cd$ des Kegelschnittes. Diese Kreise schneiden sich in zwei Puncten e^1 und f^1, welches die ersten Projectionen von zwei Puncten der untern gesuchten Curve sind, die indeß in der horizontalen Projection verdeckt ist. Die verticalen

Projectionen dieser Puncte sind e und f; der Scheitel der zugehörigen Curve liegt auf der Centrale S^1c^1 der Mittelpuncte beider Körper in m^1.

Man überzeugt sich leicht, daß man die obere, in beiden Projectionen sichtbare Curve nicht mit der untern zugleich erhalten kann; indessen ist das Verfahren von dem bei der untern Curve angewandten nicht verschieden, wenn man die horizontale Durchschnittsebene so wählt, daß durch sie beide Körper zugleich geschnitten werden; diese Schnitte sind ebenfalls Kreise und müssen sich berühren.

Um dieser Bedingung zu genügen, ermittele man die Scheitel m und n der Curven. Man lege eine Ebene durch die Axe des Kegels und das Centrum der Kugel; ihr erster Schnitt liegt in c^1L^1, der verlängerten Centrale der Kreise c^1 und S^1. Stellt man sich diese Ebene um die Linie c^1C gedreht vor, bis sie mit der zweiten Projectionsebene eine parallele Lage erhält, so werden die Puncte S^1, L^1 bei dieser Bewegung Kreisbögen beschreiben, um die Lage s^2L^2 einzunehmen, mithin wird die Axe des Kegels in D^1S^2 zu liegen kommen. Zieht man noch S^2L^3, so ist diese Erzeugungslinie des Kegels in dieser Lage, welche die Kugel in p und r schneidet. Bewegt man die Ebene in ihre frühere Lage zurück, so werden diese Puncte um die Linie c^1C horizontale Kreisbögen beschreiben, deren Verticalprojectionen die mit der Grundlinie parallelen po und qr sind; diese Bögen schneiden die Erzeugungslinie S^1L^1 in m^1 und n^1, deren Verticalprojection in m und n liegt.

Man bemerkt ferner, daß, wenn man in der Horizontalprojection die von den Durchschnittsebenen op und qr in beiden Körpern geschnittenen Kreise zieht, diese Kreise sich nur berühren einmal bei m^1, einmal bei n^1, woraus folgt: daß alle Horizontal-

ebenen, welche man zwischen op und qr durch die Körper legt, aus Mangel an Durchschnitten keine Bestimmungspuncte der verlangten Curven geben können.

Noch sind die Puncte zu bestimmen, wo die Curven die Seiten des Kegels AS und BS berühren. Da die verticale Ebene, welche jene Linien enthält, die Kugel in einem Kreise schneidet, dessen Projection i^1j^1 ist, so wird derselbe, wenn man in der zweiten Projection diesen Kreis vom Durchmesser i^1j^1 aus C zieht, von AS und BS in vier Puncten geschnitten, welches diejenigen sind, wo die äußern Erzeugungslinien des Kegels die beiden Curven tangiren.

122. — **Aufgabe.** Es durchdringen sich zwei Kugeln, man soll die Curve des Anschlusses ihrer Oberflächen bestimmen.

Wenn zwei Kugeln sich durchdringen, so sind ihre Durchschnitte in den Projectionen Kreise, Ellipsen oder Gerade je nach der Lage der gemeinschaftlichen Durchschnittsebene, die stets senkrecht der Centrale der Kugeln ist (Fig. 127b). Man hat also nur nöthig, die Axen der Ellipsen oder den Mittelpunct des gemeinschaftlichen Kreises zu bestimmen.

Legt man eine senkrechte Ebene P durch die Centrale, so werden die Kugeln in zwei senkrechten größten Kreisen geschnitten, welche, wenn man sie um die durch den Mittelpunct gezogene Senkrechte dreht und in die Ebene P^1 niederlegt, in a und b fallen. Der auf der Centrale senkrecht stehende Kreis des Durchschnitts erscheint dann als Linie vz, welche die wahre Größe seines Durchmessers, folglich auch die der großen Axe $x''t''$ oder $x't'$ ist. Der nach $v_{,}$ projicirte und nach $v_{,,}$ zurückgelegte Punct v'' bestimmt einen Endpunct der kleinen Axe in der horizontalen Projection. Schneidet man noch

die Kugeln durch eine senkrechte Ebene P^3, welche ebenfalls durch die Centrale geht, und legt den Durchschnitt in die erste Projectionsebene nieder, so projicirt sich der Durchschnittskreis in m'n' und es ergibt sich $n_{,,}$ als Endpunct der kleinen Axe in zweiter Projection.

123. — Es mögen sich noch einige zusammengesetztere Aufgaben für orthographische Projection zur Uebung anschließen.

Die Anwendung der Projectionslehre auf Maschinen, Baugegenstände und andere technische Anlagen würde zu weit führen. Hat der Zeichner die vorgetragenen Lehren gut aufgefaßt, die Aufgaben an ähnlichen selbst gegebenen wiederholt geübt und stets die Gründe, welche die oder jene Projection bedingen, im Auge, dann wird kein Fall vorkommen, dessen Schwierigkeiten er nicht zu überwinden wüßte. Unter den Schriften, die zum Studium zu empfehlen sind, nennen wir

Dessin des Machines par Leblanc, (wovon auch eine deutsche Uebersetzung im Auszuge vorhanden ist);

Etudes de Projections, d'ombre et de lavis par I. B. Tripon;

Geometrisches Portfolio von G. Schreiber;

Lehrbuch der descriptiven Geometrie, von Lefebure de Fourcy, übersetzt von v. Bünau;

J. Adhemar, darstellende Geometrie, übersetzt von Möllinger.

Möllinger, Lehre vom Steinschnitt.

Wolff, beschreibende Geometrie,

worin Beispiele aller Art der Uebung geboten werden.

124. — **Aufgabe.** Es sei Fig. 128 A die erste Projection eines Wellstücks gegeben, dessen Axe parallel der ersten Pro-

jectionsebene liegt; man soll die zweite Projection entwerfen.

Bekanntlich ist die Projection aller Kreise, die senkrecht einer Projectionsebene stehen, auf dieser Projectionsebene der Durchmesser, auf derjenigen aber, mit welcher die Kreisebene einen schiefen Winkel eingeht, eine Ellipse, die zur großen Axe den Durchmesser, zur kleinen die Projection dieses Durchmessers in der Verkürzung, die durch schräge Lage entsteht, hat. Hierauf ist das Verfahren gegründet, welches bei jedem Cylinder und hier bei dem aus mehrern cylindrischen Stücken bestehenden Körper in Anwendung kommt.

Man ziehe sonach im vorliegenden Fall die Cylinderaxe ao' auf der zweiten Projectionsebene, parallel der Projectionsaxe und bestimme deren Länge durch projicirende Linien aus a' und c Fig 128 A, mache a,a,, Fig. B gleich aa'' Fig. A und ziehe die äußern parallelen Seiten des ersten Cylinderstücks, deren Länge sich wieder durch die projicirende Linie aus b' Fig. A bestimmt, auf welcher zugleich die große Axe der zweiten Ellipse liegt. Die beiden kleinen Axen werden durch die projicirenden Linien aus a,a'', d,d', Fig. A abgeschnitten. Da hieraus die beiden Ellipsen construirt werden können, so ist das erste Stück der Welle vollendet. Die Ellipse dd' bildet die Durchgangscurve des ersten und zweiten Stücks und liegt mit der ersten Ellipse des zweiten Stücks in einer Ebene, hat also die Richtung der großen Axe mit dieser gemein. Man mache diese gleich bb, Fig. A, bestimme aus e'' die zweite große Axe und aus bb, die kleinen Axen und vollende das zweite Cylinderstück. Man beachte, daß bei den hintern Ellipsen immer nur die einen Hälften sichtbar sind, welche nach links liegen; von

dem Stück c'e, aber wird Alles durch die vorspringenden andern Stücke verdeckt.

Auf dieselbe Weise projicirt man ein Stück nach dem andern, indem man stets damit anfängt aus der Mitte des Stücks in erster Projection die Stellung der großen Axe zu projiciren, und damit schließt, die Ellipse zu zeichnen.

Der Anlauf h'k ist nicht schwierig zu zeichnen; er verbindet die Endpuncte der Durchmesser durch seine äußern Erzeugungslinien und schließt sich in zweiter Projection tangirend an; ebenso der Anlauf lm.

Bei dem ringförmigen Wulst genügt, daß man eine Senkrechte durch dessen Mitte auf a'c als projicirende Linie zu Bestimmung der großen Axe u'v' zieht, die kleine Axe il bestimmt und die der Ellipse zugehörigen kleinen Kreisbögen bei u' und v' beschreibt.*) Die übrigen Stücke erfordern ebenfalls nur das beschriebene Verfahren und so kann die Welle leicht vollendet werden. Sie ist nur ein combinirter Fall der Projectionen von Cylindern.

125. — Man nennt im Allgemeinen **Umwälzungsflächen** diejenigen Flächen, welche durch die Umdrehung irgend einer Linie (geraden, gebogenen oder gemischten) um eine andere gerade unveränderliche Linie erzeugt werden, so daß in jedem Moment der Drehbewegung die Lage der drehenden Linie gegen die unbewegliche eine gleiche, d. i. jeder Punct derselben in gleichem Abstand bleibt.

Eine solche Umwälzungsfläche ist Fig. 129 dargestellt. Hier ist a''a⁰ die feststehende Linie, die **Axe**, um welche sich die doppelt gebogene Linie 1, 4, 8, die **Erzeugungslinie**, mit Beibehaltung

*) Obgleich diese Curven nicht wahre Kreisbögen sind, so können sie doch ohne merklichen Fehler als solche gezeichnet werden.

gleichen Abstandes aller Puncte herum bewegt hat. Dergleichen Umwälzungsflächen (wohin auch der Kegel, die Kugel, der Cylinder, das Ellipsoid, die Erzeugnisse der gemeinen Dreh- und Thonkünstler ꝛc. gerechnet werden müssen) haben besondere Eigenschaften, welche größtentheils aus ihrer Entstehungsweise entspringen. Die namhaftesten, worauf bei der Projection Rücksicht genommen werden muß, sind:

a) Jeder der Axe senkrechte Durchschnitt ist ein Kreis. Daraus folgt, daß, wenn man mehrere solche Durchschnittsebenen legt, ein System von Kreisen entsteht, die in erster Projection concentrisch sind. Diese Kreisebenen heißen Parallelkreise der Umwälzungsfläche; der Theil zwischen zweien dieser Kreise heißt Zone, oder Gürtel. Jeder Parallelkreis hat zwei coordinirte Pole, die Puncte der Axe sind.

b) Die erzeugende Linie tritt in jedem Moment ihrer Bewegung in einen Meridian, wie k''y, und diese verändern sich in der zweiten Projection in jedem Moment der Drehung und gehen von der wahren Gestalt durch die gerade Linie bis wieder zu ihrer geometrischen Gestalt über, die sie in den äußern Begrenzungen der zweiten Projection (im Allgemeinen) beibehalten. In der ersten Projection treten die Meridiane als radiale Linien auf.

c) Jeder Punct eines Meridians liegt in der Peripherie des durch ihn gedachten Parallelkreises; tritt er in einen andern Meridian, so hat er einen Kreisbogen beschrieben und bei vollendeter Umdrehung stellt sich die Bewegung in erster Projection als einer der concentrischen Parallelkreise dar.

d) Jeder Punct, wenn er in einen andern Meridian tritt, behält immer gleichen Abstand von

der ersten Projectionsebene, also in der zweiten Projection von der Projectionsaxe G^0.

Die Benennungen, welche die Geometrie in der Lehre von der Kugel eingeführt hat, finden im Allgemeinen für jede Umwälzungsfläche gleich bezieh-lich statt. So hat man auch bei ihr größte Parallelkreise, Pole, Zonen ꝛc.

126. — Die Anordnung von Parallelkreisen ist bei dem Zeichnen einer Umwälzungsfläche wichtig und unentbehrlich. Die Kenntniß ihres Höhenabstandes und der Radien lassen jede Umwälzungsfläche leicht projiciren. Die Construction wird vereinfacht, wenn man mehrere Parallelkreise so anordnet, daß die horizontalen Projectionen ineinander fallen, wie z. B. die Kreise 1 und 5, 2 und 4, 6 und 8. Ferner legt man die ersten so, daß sie durch ausgezeichnete Puncte der Umwälzungsflächen gehen, wie durch 7, als den am meisten vorspringenden und 3, als den am weitesten eingezogenen Punct.

127. — **Aufgabe.** Es ist die Erzeugungslinie 1, 2...8 gegeben, man soll durch den Punct k'' einen Meridian projiciren.

Die Axe $a''a^0$ muß bestimmt sein, man kennt daher auch den Abstand k'' von der senkrechten Ebene, die durch die Axe und den Meridian $a''a^0$ gedacht werden kann, welcher gleich a''k'' ist. Mit diesem Radius beschreibe man aus a' der Axenverlängerung einen Kreis, projicire k'' auf diesen Kreis nach 5' und ziehe den Halbmesser a'u. Dieser ist die erste Projection des gesuchten Meridians. Nun lege man eine beliebige Anzahl Parallelkreise, wodurch die Umwälzungsfläche in der zweiten Projection in den Linien 1, 2, 3...8 geschnitten wird, projicire diese Puncte auf a'p und ziehe aus a'

durch die Fußpuncte der Projicirenden concentrische Kreise. Wo diese die Linie a'u schneiden, ergeben sich so viel Puncte des Meridians auf den beziehlichen Parallelkreisen in der zweiten Projection, so daß man die Durchschnittspuncte 3',4',5',6',u nur nach y,7'',6'',5''...2'' überzutragen hat, welches sowohl durch senkrechte Projicirende, als durch Ordinaten zur Abscisse a'a, geschehen kann. Man verbindet zuletzt die gefundenen Meridianpuncte durch eine Curve aus freier Hand.

128. — Diese Aufgabe findet häufige Anwendung bei Vasen, bei Projicirung von Erd- und Himmelsgloben und ähnlichen Gegenständen, besonders wenn die Vasen regelmäßige Gliederverzierungen haben; überhaupt ist dadurch die allgemeine Lösung gegeben, wenn irgend ein Punct in beiden Projectionen zu bestimmen ist. Man wird sich erinnern, daß in dem Vorhergehenden von ihr schon öfter Gebrauch gemacht worden ist, und so wird diese Beziehung auf Umwälzungsflächen das Verständniß der gebrauchten Constructionen um Vieles erweitern.

Eine Anwendung auf den complicirtern Fall einer verzierten Vase findet man in der folgenden Aufgabe.

129. — **Aufgabe**. Es ist das Profil (die Erzeugende der Umwälzungsfläche) einer Vase und die Axe mm' gegeben; man soll die Verzierungen mit den Projectionen der Vase selbst zeichnen.

Die Laubverzierungen sind in dem Modell vorgeschrieben, der Kelch hat Canneluren, der Körper stabartige Verzierungen und die Theilungen sämmtlicher correspondiren.

Das Zeichnen der Vase an sich bietet keine Schwierigkeiten, da es durch Parallelen aus den

Eckpuncten des Profils leicht bewirkt werden kann, die Kanten sich aber in der ersten Projection als concentrische Kreise darstellen. Die Verzierungen einzutragen lege man Parallelkreise c,b,3,4,7,6,7,8 und G zwischen die, welche die Glieder unmittelbar bedingen. Dabei ist Rücksicht genommen worden, daß mehrere Kreise sich decken, wie b,b,5,7, desgleichen e und 8. Man projicire die Glieder und die Parallelkreise in die erste Projectionsebene als concentrische Kreise. Der äußerste ist die Projection von der Kante aa' mit dem Halbmesser m,a. Den Kreis theile man nach Maßgabe der Verzierungen in gleiche (hier in 36) Theile und ziehe durch die Theilpuncte Radien. Diese Radien sind erste Projectionen von 36 Meridianen, auf welchen die Mitten oder Theillinien sämmtlicher Verzierungen liegen, und ihre Durchschnitte mit den concentrischen Kreisen sind die Puncte, wo in zweiter Projection die Meridiane die Parallelebenen schneiden müssen. Man braucht daher nur diese Puncte auf die beziehlichen Parallelen cc', aa', bb'.... zu projiciren, um die Meridiane und die dadurch geregelten Verzierungen einzeichnen zu können.

Dabei bedarf es anstatt der ausgezogenen projicirenden Linien nur kurzer Durchschnitte; denn man muß vermeiden, die Zeichnungen mit Linien zu überladen und würde auch durch die Menge der Linien leicht Verwirrung herbeiführen. Diejenigen Schnitte, welche auf Kreise fallen, die sich in der ersten Projection decken, ziehe man stets auf allen den beziehlichen Linien der zweiten Projection zugleich, ohne das Lineal zu verschieben; dieses trägt Vieles zur Genauigkeit bei. Die Figur wird die weitere Ausführung ohne Beschreibung hinreichend erläutern.

130. — Es sei hier noch einiger Verhaltungsregeln gedacht, die man beim Zeichnen orthographi-

scher Projectionen nach einem Modelle zu beobachten hat.

Man beginne damit, sich einen Entwurf nach dem Augenmaße, das Modell von denjenigen Seiten betrachtet zu machen, durch deren Darstellung man das genaue Verständniß am sichersten herbeiführen kann. In der Regel gehört dazu ein Grundriß, eine vordere und Seitenansicht und nach Umständen ein Durchschnitt.

Ist der Gegenstand auf einer Horizontalebene (Fußboden, Tisch rc.) und an senkrechte Wände gestellt, so lassen sich diese als Projectionsebenen betrachten, so daß jeder Punct des Gegenstandes oder doch mehrere Hauptpuncte sich durch zu messende projicirende Linien bestimmen lassen.

Andere wieder können nach dem Abstand unter einander gemessen werden; jedoch wird stets die Genauigkeit eine größere, wenn man die Messungen auf eine und dieselbe Ebene beziehen kann.

Geben dergleichen natürliche Projectionsebenen kein Anhalten, dann muß man deren Mangel durch künstliche Mittel ersetzen. Eins der ersten ist das Senkloth, dessen Unbeweglichkeit man sich versichern muß, bei kleinern Gegenständen ein rechtwinkliges Dreieck. Letzteres verlangt aber eine sichere Horizontalebene, um es nach allen Richtungen aufstellen und gegen den Gegenstand anschieben zu können. Bei größern Gegenständen richtet man auch wohl geradlinige Latten mittelst des Senklothes fest auf und mißt die Abstände der zu bestimmenden Puncte von dieser Lothlinie genau horizontal (wozu nöthigen Falls eine Setzwage gebraucht wird), und an der Lothlinie die Höhenabstände.

Es würde kleinlich erscheinen, wollte man hier die Manipulationen näher beschreiben, übrigens sind viele Hülfsmittel von der Localität und der Eigen-

thümlichkeit des Gegenstandes zu entnehmen. Runde Theile, von geringerer Stärke, können mittelst eines Tastorzirkels gemessen werden, größere durch tangentiale Aufstellung zweier rechtwinkligen Dreiecke, Senklinien, wohl auch durch die Abstände von andern sicher bestimmten Puncten. Zuweilen muß man auch zu dem Mittel greifen, den Umfang durch ein undehnbares Band, einen Lederriemen ꝛc. zu messen und daraus den Durchmesser zu berechnen. Hohlungen, wenn deren Durchmesser nicht dem Maßstabe zugänglich sind, sind bei kleinen Dingen mittelst eines Tastorzirkels abzunehmen, dessen Schenkel gerade und mit nach außen gerichteter Spitze versehen sind.

Alle vermittelnden Hülfslinien sind durch Maße in dem Brouillon genau festzustellen, die Maße aber jeder Linie so beizuschreiben, daß sie in der Richtung derselben oder parallel mit ihr stehen. Je übersichtlicher der Brouillon ausgearbeitet worden, desto leichter wird die Arbeit des Reinzeichnens. Besonders überlege man wohl, welche Messungen dazu gehören, um den oder jenen Punct völlig zu bestimmen; die Sätze der Projection von Puncten, Linien und Flächen geben darüber vollständige Belehrung.

Bei manchen Gegenständen wird es nöthig, Details in dem Brouillon abgesondert zu zeichnen und zu vermessen; auch gehören dahin diejenigen Theile, welche verdeckt liegen oder ihrer Kleinheit wegen in dem Entwurf nicht genau eingezeichnet werden können. Dergleichen Specialitäten müssen in dem Brouillon größer abgebildet werden, oft in natürlicher Größe. Bei architectonischen, z. B. Friesverzierungen, zieht man auch wohl parallele Schnuren und betrachtet sie als Schnitte von horizontalen oder verticalen Ebenen.

Die Vorsicht, welche man beim Reinzeichnen in Hinsicht der Instrumente zu beobachten hat, wird jedem geübten Zeichner eigen geworden sein. Sie kann nie in das Kleinliche übergehen. Besonders wichtig sind diese Rücksichten beim Zeichnen größerer perspectivischer Entwürfe, wobei die äußerste Genauigkeit der Manipulation, der Instrumente und der Operation selbst erforderlich ist, um nicht in Fehler zu verfallen.

131. — Die Figuren 130, 131 und 132 geben noch ein Beispiel aus der Maschinenkunde von zusammengesetzter Form, das eines conischen Rades in verwendeter Lage.

Der Zeichner findet in der Figur selbst die nöthige Anleitung, deren Hauptzüge in der Bildung der verschiedenen Ellipsen aus den Kreisen der ersten (Figur 132) und der zweiten Projection Fig. 131 bestehen, welche aus den Theilkreisen und der Zahnconstruction hervorgegangen sind.

Es muß jedoch noch Folgendes erläutert werden:

Denkt man das Rad Fig. 132 um S so gedreht, daß die Axe So'' senkrecht der ersten Projectionsebene zu stehen kommt, jedoch parallel der zweiten Projectionsebene bleibt, so hat man die horizontale Projection der 131. Figur, welche sonach zuerst gezeichnet und mit Berücksichtigung des Neigungswinkels geometrisch übergetragen werden kann.

Die Stellung Fig. 132 hilft nebst Fig. 131 zu Bestimmung correspondirender Puncte auf den beziehlichen Ellipsen in Fig. 130. Die projicirenden Linien sind weggelassen worden, um die Zeichnung nicht zu überladen, da das Verfahren genugsam bekannt sein muß. Der conische Winkel $a^1 S b^1$ ist 96^0.

Um die Mittelpuncte zu finden in welchen, Fig. 130 die Zähne und deren Stirnkanten zusammenlaufen, verlängere man die Axenlinie $o_{,,}S$ des Rades,

trage zu jeder Seite den halben conischen Winkel a'Sb' und bilde mit der Projection des Theilrisses a'b' das Dreieck a'Sb'. Die Richtungen der Zähne convergiren in S, daher laufen alle Linien, welche den Scheitel und den Fuß eines Zahns bilden, in S zusammen, welcher Punct s' zur Projection in Fig. 130 hat. Die innern Stirnkanten haben einen von den äußern verschiedenen Convergenzpunct. Um diese beiden Puncte in Fig. 130 zu bestimmen, errichte man in a' und c' Normalen auf Sa', welche durch die äußern Kanten der Zähne gehen und ihre Richtlinien sind, und projicire die Puncte o'' und o,,, wo die Normalen die Projection der Axenlinie schneiden, nach o' und o, der Linie ab. Es ist dann der Punct o, der Convergenzpunct für sämmtliche äußere und o' der für die innern Stirnkanten.

Die Abrundungen der Obertheile der Zähne liegen zwischen den Ellipsen des Theilrisses und des Scheitels der Zähne.

Es würde die Genauigkeit der Zeichnung zu weit getrieben werden, wollte man die Epicycloide der Abrundung für jeden Zahn regelmäßig construiren; es reicht deren Einzeichnung aus freier Hand aus.

Zweite Abtheilung.

Isometrische Projection.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Grundsätze der isometrischen Projection.

132. — Es ist keine Projectionsart so geeignet, eine Raumbildung in plastische Anschauung zu bringen und aus der Projection die wahre Größe und Lage der einzelnen Theile bequem wieder ableiten zu lassen, als es die isometrische Projection ist. Dies macht ihre Anwendung sehr vortheilhaft für Maschinenbauer und andere Techniker, und ein isometrisches Bild wird weit eher von dem gemeinen Arbeiter verstanden werden, als ein nach der gewöhnlichen orthographischen oder Centralprojection ausgeführtes. Diese Projectionsmethode hat seit Farish bei den Engländern, dieser Autorität in der Technik, viel Beifall gefunden und verlangt hier um so mehr in ihren Grundprincipien aufgenommen zu werden, da diese bis jetzt nur wenig bekannt, noch weniger richtig verstanden worden sind.

133. — Denkt man sich drei coordinirte Projectionsebenen, die eine gegenseitig rechtwinkliche Lage haben, als Flächen eines Würfels, dazu eine vierte Projectionsebene AB, die senkrecht der Diagonale des Würfels steht (Fig. 134), und die letztere Ebene in horizontale Lage versetzt, wodurch die Projection des Punctes a in a^1 fällt, so werden

1) die Projectionen a^1x^1, a^1y^1 und a^1z^1 der drei ursprünglichen Projectionsaxen ax, ay, az sich paarweise unter den Winkeln von 120° und 60° schneiden.
2) die Projectionen der Axen ax, ay, az in demselben geometrischen Verhältnisse sich verkürzen, so daß
$$a^1x^1 : ax = a^1y^1 : ay = a^1z^1 : az.$$
3) werden die Projectionen aller Linien im Raum, welche den drei Axen parallel sind, auch parallel mit deren Projectionen und in demselben Verhältniß verkürzt sein.

Wir übergehen hier die Beweise dieser drei wichtigen Sätze, die der Geometer leicht auffinden wird, weil die Tendenz der vorliegenden Schrift mehr auf den Unterricht des Practiker und des Künstlers gerichtet ist.

134. — In Fig. 135 sind wieder die drei Projectionen x,y,z aus § 133 dargestellt. Ist nun P ein gegebener Punct im Raum, so sind Pp, Pp′, Pp″ die projicirenden Linien in Bezug auf die drei Würfelebenen, die Puncte p, p′, p″ bilden Projectionen zweiter Ordnung, d. h. die Projectionen des Punctes P auf den Würfelebenen sind selbst wieder auf eine vierte Ebene projicirt.

Diese Projectionsmethode, zum Unterschiede von der allgemeinen Projectionsmethode die isometrische genannt, wird allen Forderungen entsprechen; nur ist noch das irrationale Verhältniß $\sqrt{2}:\sqrt{3}$,

in welchen die Projectionen der auf die Würfelebenen gefällten Senkrechten zu diesen Senkrechten selbst stehen, und dadurch die Maßbestimmung von **Pp**, **p'm** und **p''n** unbequem. Es bieten sich jedoch Mittel zu einer einfachen Ausführung des Verlangten, welche in folgender Aufgabe dargelegt werden.

135. — **Aufgabe.** Die geometrischen Entfernungen (projicirenden Linien) p^1p^0, pp^0 und pn eines Punctes im Raum von drei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen sind gegeben, man soll die isometrische Projection des Punctes **P** construiren (Fig. 136).

Zu Lösung dieser Aufgabe gehören drei Operationen:

1) Bestimmung der isometrischen Projectionen der drei Projectionsaxen **ax**, **ay** und **az**.
2) Construction eines Maßstabes um die gegebenen Entfernungen des Punctes **P** von den Ebenen **xaz**, **xay** und **yaz** in dem Verhältniß von $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ zu verjüngen; und
3) Construction der isometrischen Projection des gegebenen Punctes **P**.

Die Ausführung dieser Operationen besteht in Folgendem:

ad 1. Man beschreibe einen beliebigen Kreisbogen **yox**, ziehe durch den Mittelpunct **a** eine unbestimmte Gerade **zo**, schneide aus dem Durchschnittspunct **o** mit dem Radius des ersten Bogens denselben durch einen zweiten und verbinde die beiden Durchschnittspuncte mit **a**. Die Sehnen **ax**, **ay** und die Richtung **az** sind nun die drei isometrischen Projectionsaxen und bilden Winkel von 120° (Fig. 137).

ad 2. Der verlangte Maßstab findet sich in dem rechtwinkligen Dreieck Fig. 138. Man trage auf die Schenkel des rechten Winkels eine beliebige

Länge ab gleich ac und verbinde bc. Diese Verbindungslinie bc trage man von a nach d und ziehe cd. Dadurch verhalten sich

$$ad : cd \text{ wie } \sqrt{2} : \sqrt{3},$$

wie aus dem Pythagoräischen Lehrsatze folgt.

Einfach läßt sich der aus dieser Betrachtung abgeleitete Maßstab nach Fig. 139 construiren, wenn man mit cd (Fig. 138) aus c den Bogen ad beschreibt und in diesen die Sehne ad (Fig. 138) einträgt, wodurch alle Radien sich zu den zugehörigen Sehnen innerhalb dieses Winkels in dem verlangten Verhältniß verhalten. Der Gebrauch dieses Maßstabes wird weiter unten erörtert werden.

Dieser Maßstab kann, wenn viele Linien zu bestimmen sind, auch nach Fig. 140 construirt werden, welche Gestalt ihn etwas bequemer beim Gebrauch macht.

Man bilde ein gleichschenkliches Dreieck, dessen gleiche Seiten gleich cd, die ungleiche gleich ad (Fig. 138) sind, und ziehe beliebige Parallelen mit ad. In ihm verhält sich ebenfalls z. B.

$$c2 : 22' = \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

ad 3. Soll nun die isometrische Projection des Punctes P bestimmt werden, so beschreibe man ap^0 Fig. 136, aus c Fig. 139 einen Bogen 1,1' und trage die Sehne auf die isometrische Projection der Axe x Fig. 137 von a nach n, ziehe np parallel der Axe y, nehme dann p^0p Fig. 136, beschreibe in Fig. 139 mit diesem Radius den Bogen 2,2' und trage die Sehne 2,2' auf np; durch p ziehe man die Richtung pp' parallel der Axe z, suche auf dem Maßstabe die verjüngte Länge von p^0p' und trage die Sehne 3,3' in pp'. Der Punct p' ist dann die isometrische Projection des Punctes P im Raum, abgeleitet aus der orthographischen Projection Fig. 136; denn man hat in Bezug auf den Maßstab:

$1,1':c1=2,2':c2=3,3':c3=ad:cd=\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

Zieht man durch p' die Parallelen p''p', p,,,p' mit den Axen x und y und trägt darauf die Längen pp⁰ und pn, so ergeben sich die isometrischen Projectionen der Puncte p'' und p,,, oder die Projectionen zweiter Ordnung des Punctes P.

136. — Da es bei dergleichen Constructionen nie auf die absoluten Größen der Linien, sondern blos auf ihre Größenverhältnisse ankommt, um sie auf eine gewisse Maßeinheit beziehen zu können; die Projectionen auch nur die Mittel sind, um die gegenseitige Lage der Linien und die Formbildung nebst Maß daraus ableiten zu können, da es daher erwünscht ist, die Lösung auf die einfachste Art herbeizuführen: so schaffen wir das obige irrationale Verhältniß durch eine leichte arithmetische Operation fort, und erhalten dadurch den Vortheil, daß die zweite und dritte Operation § 135 in eine zusammengezogen und damit vereinfacht wird, daß man anstatt der verjüngten Verhältnisse die durch die orthographische Projection gegebenen Coordinaten p⁰p, pn und p⁰p' unmittelbar abnehmen und in an', n'p, und p,p,, tragen kann.

Wir müssen indeß diese hier erklärte Projectionsmethode als einen speciellen Fall der sogenannten zweiarig-isometrischen Projectionsmethode aufstellen, deren Grundzüge in dem Folgenden mitgetheilt werden sollen.

Zweiter Abschnitt.

Zweiaxig-isometrische Projectionsmethode.

137. — Denkt man die drei gedachten Projectionsebenen nicht als Flächen eines Würfels, sondern allgemeiner als Seiten eines Prisma's mit quadratförmiger Grundfläche und dieses mit der Transversale mn senkrecht auf eine vierte Projectionsebene gestellt (Fig. 141), so ändern sich die Winkel der Projectionsaxen mx, my und mz und das Verhältniß der Axen. Es finden jedoch folgende Relationen statt:

1) Die beiden Projectionsaxen mx und my und alle mit ihnen parallele Linien werden in gleichem Verhältniß verjüngt.
2) Die Projection der Axe mz theilt den Winkel der andern beiden Projectionsaxen mx, und my, in zwei gleiche Theile; es ist nemlich y,mz, = z,mx.
3) Der von den Projectionsaxen mx, und my, gebildete Winkel ist stets >R und <2R.
4) Ist die Höhe des Prisma's einer Grundkante gleich, wie bei dem Würfel, so werden alle Projectionsaxen in demselben Verhältniß verjüngt und schneiden sich unter Winkeln von 120° und 60°. Dieses ist der specielle Fall der isometrischen Projection.
5) Wenn die Höhe des Prisma's kleiner ist als eine Grundkante, so werden die Axen mx, und my, in einem größern Verhältniß verkürzt, als die Axe mz, und die ihr parallelen Linien und

der von den Projectionsaxen gebildete Winkel y,mx, ist größer als 120°.

6) Im Gegentheil werden die Projectionsaxen mx, und my, in einem kleinern Verhältniß verkürzt, als die dritte Axe mz,, wenn die Höhe des Prisma's kleiner ist als eine Grundkante, und der genannte Winkel wird kleiner als 120°.

Der Geometer wird sich die Beweise zu diesen sechs Sätzen aus der Fig. 141 leicht bilden können, wenn er trigonometrische Functionen zu Hülfe nimmt. Hier müssen sie weggelassen werden.

138. — Nach § 136 und Relat. 1 kann man in jedem Falle, wo ein Punct auf drei senkrechte Ebenen orthographisch projicirt ist, und den Ebenen eine solche symmetrische Stellung auf einer vierten Ebene angewiesen wird, daß die Projectionen der Axen mx und my und die mit ihnen parallelen Linien in gleichem Verhältniß verkürzt werden, statt dieser Verkürzungen die Coordinaten selbst setzen.

Wenn daher die Ebenen G',G'',G''', auf welche ein Punct P bezogen werden soll (Fig. 142), nebst P auf eine vierte Ebene so zu projiciren sind, daß die Axen mx und my den Winkel xmy Fig. 143 bilden und die dritte Axe diesen Winkel halbirt, so trägt man die Coordinaten mq und pq unmittelbar in mq und mr, und erhält dadurch die Projection P' des Punctes P.

139. — Ist der Winkel xmy $\gtrless$ 120°, dann tritt die fünfte Relation ein und es müssen die mit den Axen mx und my parallelen Coordinaten mq und qP' auch in einem andern Verhältniß verkürzt werden, als die mit der Höhenaxe parallelen Linien; daher muß auch die Projection PP' der Höhenordinate qp' Fig. 142 größer oder kleiner genommen werden, als diese Ordinate selbst. Man muß deshalb

ein Verfahren auszumitteln suchen, dieses Verhältniß zu bestimmen, und dazu verhilft uns die folgende Aufgabe.

140. — **Aufgabe.** Gegeben ist die Grundebene eines quadratischen Prisma's, dessen Diagonale auf der Projectionsebene normal steht. Es soll die Höhe dieses Prisma's bestimmt werden. (Fig. 144).

Es sei der Winkel $b'''ad''' = \llcorner xmy$ Fig. 143. Bildet man mit ihm und der Diagonale $= c'n$, ein Rhombus und leitet von ihm das Quadrat **abcd** ab, so kann man dieses als die erste Projection eines quadratischen Prisma's von solcher Höhe betrachten, daß das Rhombus die horizontale Projection von dessen Grundebene ist, wenn das Prisma mit seiner Diagonale normal auf der ersten Projectionsebene steht.

Um diese Höhe zu ermitteln, beschreibe man mit $a'c'$ einen Bogen und errichte in c'' eine Normale auf G^0, deren Verlängerung den Bogen in c_3 schneiden wird. Hierdurch wird zunächst die zweite Projection der Grundebene des Prisma's bestimmt, und durch die Normale c^3n^3, wo diese die Linie a^1n^1 schneidet, auch die Höhe $c_3n^3 = a^1m^3$.

Wären nun in Fig. 143 die Projectionen mq und P'q der Coordinaten nicht den Coordinaten mq und pq Fig. 142 gleich gemacht, so würde mq und pq zu ihren Projectionen sich verhalten wie $ab : ab'''$; die Projectionen der Höhenordinaten zu den Höhenordinaten selbst wie $a^1m^3 : am'''$.

Es sind aber die Projectionen mq und P'q den Coordinaten mq und pq gleich gemacht worden, wodurch sie in dem Verhältniß von $ab''' : ab$ vergrößert wurden; daher müssen auch die Projectionen

der Höhenordinaten in demselben Verhältniß vergrößert werden.

Man erhält diese Vergrößerung, wenn man aus a den Bogen bb, beschreibt und parallel b'''m''' die Gerade b,m'' zieht, wodurch sich in am'' die in dem verlangten Verhältniß vergrößerte Projection der Höhe a^1m^3 ergibt; und da die Projectionen aller mit der Coordinatenaxe a^1m^3 parallelen Linien in demselben Verhältniß stehen, so ist auch

$$\underbrace{PP^1}_{\text{Figur 143}} : \underbrace{qp^1}_{\text{Figur 142}} = \underbrace{a^1m^3 : am''}_{\text{Fig. 144.}}$$

Sind nach diesem Verhältniß mehrere Höhen zu ermitteln (Fig. 144a), so bedient man sich eines der beschriebenen Proportionalmaßstäbe. Man beschreibe mit dem Radius a^1m^3 einen Bogen, trage in ihn am'' als Sehne und ziehe mp und mp'.

Mittelst desselben erhält man z. B. die Höhe P'P Fig. 143, wenn man mit qp' Fig. 142 einen Bogen pp' beschreibt und P'P der zugehörigen Sehne gleich macht.

141. — Man nennt diese Methode die zwei-arig-isometrische Projectionsmethode, weil hier nur diejenigen Ordinaten in ihrer geometrischen Größe aufgetragen werden, welche mit den Projectionsaxen mx und my Fig. 143 parallel sind, die Höhenordinaten dagegen in einem bestimmten Verhältnisse vergrößert oder verkleinert werden müssen. Dadurch unterscheidet sie sich von der dreiarigen oder gewöhnlichen isometrischen Projectionsmethode, wo alle mit den drei Hauptaxen parallelen oder in sie fallenden Linien die geometrische gleich verjüngte Größe haben.

142. — Um der zweiarigen Theorie eine allgemeinere Begründung zu geben, verändern wir die vorige Aufgabe jetzt dahin (Fig. 145a), daß anstatt

des dort gegebenen Winkels eine Ebene angenommen wird, die auf der Linie P,P′ normal steht, und worauf der Punct m,m′ projicirt werden soll.

Man bezieht dann den Punct auf drei (einander normale) Seiten eines quadratischen Prisma's, dessen Diagonale mit der gegebenen Linie P,P′ parallel ist, beschreibt über der horizontalen Projection der Linie (P) einen Kreis, worin man das Quadrat abcd einschreibt, welches die erste Projection des Prisma's ist, da die erste Projection bc seiner Diagonale mit der ersten Projection (P) der Linie zusammenfällt.

Um die Höhe des Prisma's zu bestimmen, fälle man aus c und b Normalen auf G^0 und ziehe c^1e^1 parallel P^1, welches die zweite Projection der Diagonale des Prisma's ist und dabei dessen Höhe bestimmt. Betrachtet man nun ac, cd und c′c″ als die Coordinatenaxen des gegebenen Punctes (m,m′), so sind zunächst ihre Projectionen zu bestimmen, wenn man dem Prisma eine solche Stellung gibt, daß seine Diagonale auf der ersten Projectionsebene normal steht. Dies ist gleichbedeutend mit der Aufsuchung des isometrischen Winkels, welchen die Axen ac und cd einschließen, wenn man den drei Projectionsebenen abcd, ca und cd (Seiten des Prisma's) eine isometrische Stellung auf der Horizontalebene gibt.

Um den entsprechenden Winkel xcy zu erhalten, nehme man eine normale Hülfsebene b_1c_1 an, parallel mit der Diagonale P (und c^1e^1), projicire auf diese eine verticale Projection und drehe sie um c_1 bis zur normalen Lage gegen G^0. Dadurch nehmen die Seiten ac und cd die Lage cx und cx an, die Puncte x und y aber ergeben sich aus dem Puncte $d_{,,}$, dessen horizontale Projectionen sie sind.

Da nun die Coordinatenaxen cx und cy in ihrer wahren Größe beibehalten worden, so müssen

die Projectionen der mit der dritten Axe (c'c'' oder c,c,,) parallelen Ordinaten gleichfalls vergrößert werden. Man bestimme deshalb die horizontale Projection r des Punctes r^1, trage cd nach cx, ziehe xr und mit ihr die Parallele x^1r^1. Es müssen sich nun die Projectionen der Höhencoordinaten aller Puncte, welche auf die drei normalen Flächen des Prisma's bezogen wurden, zu den Höhencoordinaten selbst verhalten, wie cr zu cr^1. Zu bequemer Bestimmung dieser Höhe, d. i. zu Verwandlung der Höhencoordinaten in ihre Projectionen, benutzt man den schon öfters beschriebenen Proportionsmaßstab.

Die isometrische Projection m Fig. 145b des Punctes m Fig. 145a wird nun in Folge dieser Betrachtungen folgendermaßen bestimmt. Man bilde einen Winkel ypx, welcher dem Winkel ycx Fig. 145a gleich ist (Fig. 145b), trage cn aus dieser Figur auf die Axe y, ziehe nm, parallel der Axe x und gleich mn Fig. 145a. Bestimmt man noch die Höhe mittelst des Proportionalmaßstabes, so ist die isometrische Projection des Punctes m gefunden.

143. — Wir haben in den vorhergehenden §§ die Grundzüge der beiden isometrischen Projectionsmethoden aufgestellt, soweit es der Zweck dieser Schrift mit sich bringt. Ihr practischer Werth ist in § 132 ausgesprochen worden. Wir wollen nun das Princip aus dem materiellen Gesichtspuncte durch einige Beispiele mehr erläutern, wobei wir der dreiarigen isometrischen Methode folgen werden, weil diese durch die Bequemlichkeit, daß alle Linien, die den Hauptaxen parallel sind, in gleicher Verjüngung erscheinen, für den Techniker den meisten Werth hat.*)

*) Aus dieser Eigenschaft ist die Benennung „isometrische Projection" (von ἰσόμετρος, gleichmäßig) hergeleitet worden.

Dritter Abschnitt.

Aufgaben der dreiaxigen isometrischen Projectionsmethode.

144. — **Aufgabe.** Die isometrische Projection eines Würfels darzustellen.

Diese Aufgabe legt den Grund zu allen isometrischen Constructionen und ist in allen mehr oder weniger modificirt wiederkehrend. Ihre Ausführung besteht hauptsächlich darin, den Würfel so darzustellen, daß seine diagonale Axe auf der Horizontalebene normal steht (Fig. 145).

Zu Erleichterung der horizontalen Projection hilft die Eigenschaft, daß der Würfel in dieser Stellung zur ersten Projection ein regelmäßiges Sechseck bildet, dessen umschriebener Kreis die Diagonale des Würfels zum Durchmesser hat. Der Halbmesser des Kreises ist die Projection der Diagonale einer Grundebene auf der ersten Projectionsebene.

Dasselbe Sechseck bildet auch die zweite Projection, und der Winkel cba ist der Axenwinkel = 120° der isometrischen Projection, also sind x, y und z die drei Hauptaxen, welche, nebst den mit ihnen parallelen Kanten, die wahre Größe der Würfelkanten haben. Die Kanten, welche in der Zeichnung punctirt sind, liegen verdeckt.

145. — Aus der Geometrie ist bekannt, daß parallele Linien die sie schneidenden Linien nach gleichem Verhältniß theilen. Daher werden auch die gegenliegenden Seiten einer projicirenden Ebene, nemlich die Linie im Raume und deren Projection,

durch Normalen auf die Projectionsebene verhältnißgleich getheilt, und es müssen nothwendig die Theile zwischen den Normalen auf einer der Linie gleich sein, wenn sie es auf der andern sind. Es folgt daraus, daß die horizontalen Projectionen von n Theilen einer Linie sich unter einander und zu der ganzen Projection der Linie verhalten müssen, wie die n Theile der Raumlinie unter sich und zu der Linie selbst.

Gibt man daher einem Prisma von quadratischer Grundebene eine solche Lage gegen die erste Projectionsebene (Fig. 146), daß die drei Hauptkanten (isometrische Axen) des in dem Prisma abgeschnittenen Würfels gleich groß in der Projection erscheinen, der Würfel also die isometrische Stellung angenommen hat, so ist klar, daß die Höhenkante b^1b_1 des Prisma's, welche zum Theil mit der des Würfels zusammenfällt, eine horizontale Projection bb^2 haben muß, welche sich zu der horizontalen Projection bf^2 der Würfelkante verhält, wie die Höhenkante des Prisma's zu der Höhenkante des Würfels. Gesetzt, es sei die Kante des Würfels gleich k, die Höhenkante des Prisma's gleich n,k (wobei n jede ganze und gebrochene Zahl sein kann), die erste Projection der Würfelkante gleich k^1, dann ist auch die Projection der Höhenkante des Prisma's gleich $n.k^1$. Sonach werden bei isometrischer Stellung eines jeden Prisma's die horizontalen Projectionen der drei Hauptkanten nach demselben Maßstab verjüngt.

146. — **Aufgabe.** In Folge der § 145 gegebenen Erläuterungen bedient man sich (Fig. 146A), um ein Prisma von quadratischer Grundebene und der gegebenen Höhe aa^2 isometrisch darzustellen, des Kunstgriffes, daß man gleichsam ein hypothetisches Prisma von der Höhe

einer Grundkante construirt, welches einen von dem Prisma abgetrennten Würfel gibt. Man verlängert die Höhenkanten und macht sie gleich der gegebenen Höhe aa^2; verbindet man noch die Endpuncte, so ist das Prisma isometrisch construirt.

Die isometrischen Projectionen lassen sich bequem aus den orthographischen beiden Projectionen ableiten; man braucht letztere jedoch nicht unbedingt dazu, wenn die Dimensionen des Gegenstands in Maßen gegeben und der Verjüngungsmaßstab festgestellt ist. Auch der isometrische Grundriß ist als abgesonderte Zeichnung unnütz, indem das isometrische Bild denselben zugleich darstellt.

147. — **Aufgabe**. Ein vierseitiges Prisma, dessen rechtwinklige drei Hauptkanten sich verhalten, wie m, n, o (z. B. wie 3:4:6) isometrisch darzustellen.

Man construire zuerst mit der längsten Grundkante n (=4) das Quadrat der Grundebene eines Würfels (Fig. 147), indem man c^1m lothrecht zieht, mit dem Radius n einen Bogen dm^1n^1 beschreibt, denselben aus m^1 mit demselben Radius in d und n^1 schneidet und die Verbindungslinien zieht. Da nun die Grundkanten sich verhalten sollen wie 3:4, so trage man von d nach a drei Maßeinheiten und ziehe ab parallel m^1n^1, wodurch letzterer Seite 4 solcher Einheiten zugetheilt werden. Man errichtet dann in a,b,c,d Normalen und macht jede gleich o, also hier gleich 6 Maßeinheiten; verbindet man noch a^1, b^1, c^1, d^1, so ist die Projection vollendet.

148. — Die so erhaltene Figur ist die Projection eines zwar hypothetischen Prisma's, die jedoch dem Auge eine große Aehnlichkeit mit dem Raumkörper selbst wahrnehmen läßt, und für den Techniker ist es von besonderer Wichtigkeit, daß, neben der augenfälligen Formbildung, die Projectionen aller

Kanten, die den Axen parallel, den Kanten des abgebildeten Körpers geometrisch gleich sind, daher unmittelbar gemessen werden können.

Für die Folge werden wir die Kanten cd, bc und cc¹ oder die in a zusammenlaufen, isometrische Axen (Längen-, Breiten- und Höhenaxe); die Ebenen, welche sich paarweise in diesen Axen schneiden, die isometrischen Ebenen und alle Linien, die auf den Axen liegen, oder mit ihnen parallel sind, isometrische Linien oder isometrische Ordinaten nennen.

149. — Unter allen Stellungen, welche das beziehliche Prisma auf der Horizontalebene einnehmen kann, ist nur eine denkbar, welche die isometrische Projection sein kann, nemlich diejenige, wo die Diagonale des in das Prisma einbegriffenen Würfels normal auf der ersten Projectionsebene steht, und die Höhenkante den Winkel halbirt, den die Längen- und Breitenkante bilden.

150. — **Aufgabe.** Es soll die isometrische Projection eines prismatischen Körpers gezeichnet werden (Fig. 148a), dessen orthographische Projectionen in Fig. 148 gegeben sind.

Die erste Projection ist von solcher Form, daß es von einem Quadrat umschlossen werden kann, in dessen Seiten nicht nur die Hauptlinien des Grundrisses liegen, sondern es gestalten sich auch die Theile der Figur als aliquote Theile dieses Quadrats. Man projicire daher nach § 135, ¹ ein isometrisches Quadrat als Grundebene, theile es in soviel kleine, als es die Natur der Horizontalprojection Fig. 148a verlangt, errichte in den dadurch bestimmten Eckpuncten der Grundebene a,b,c,d....p Normalen, d. i. Parallelen mit der Höhenaxe ap und trage auf jede die in der zweiten orthographischen Projection gege-

bene Höhe $a^1 a_1$, wodurch sich auch die obere Grundebene des Körpers ergibt.

Man sieht aus dieser Auflösung, daß bei jedem Projiciren eines Körpers, dessen orthographische Projectionen gegeben oder nicht gegeben sind, vor Allem die isometrische Projection des Grundrisses vorzunehmen ist, weil dann einfach nur noch die Höhenkanten zu zeichnen und der wahren Höhe (nach dem angenommenen verjüngten Maße des Grundrisses) gleich zu machen sind.

Man kann diese Regel als die allgemeinste, fast einzige, ansehen, auf welche man bei vorkommenden Modificationen immer wieder zurückkommt. Das isometrische Quadrat wird stets zum Angriffspunct aller isometrischen Projectionen dienen. Um diese Regel noch mehr zu befestigen, wollen wir folgende vier prismatische Körper in isometrische Projection legen, die in naher Verwandschaft stehen, jedoch einzeln eine modificirte Anwendung der Hauptconstruction nöthig machen.

151. — **Aufgabe.** Es sind die Grundrisse der vier gedachten prismatischen Körper Fig. 149 $A^1 B^1 C^1$ und 150b in den Figuren 149A, B, C und 150a, die auf alle beziehliche Höhe in der Linie hn und hh^1 Fig. 149, D gegeben.

Zu $149 A^1$. Man bilde isometrisch die Projection mdc^1 des rechten Winkels in d Fig. 149A und ziehe nd^1, als Halbirungslinie des Winkels. Dadurch sind die drei isometrischen Hauptaxen gezeichnet. Man trage auf diese das Maß der Seiten ad und dg aus dem Grundriß in ad und de, und vollende durch Parallelen mit den Axen das Parallelogram ade_1e*). Hierauf verlängere man

*) Es ist zu bemerken, daß die Construction des isometri-

die längern Seiten, mache eb der gleichnamigen Linie des Grundrisses gleich, ziehe aus den Eckpuncten Parallelen mit der Höhenaxe dd' und trage auf selbige die gegebene Höhe, nemlich hh' Fig. 149D auf aa', ee'', dd' und e,e,,,, die Höhe hn dagegen auf ee',bb',cc' und e,e,,. Die Verbindung dieser Puncte ergänzt die isometrische Projection.

Zu 149B'. Man nehme wieder den Punct d beliebig und bilde wie bei der vorigen Figur den isometrischen Winkel adc_1, wozu hier die kleinere Seite des Rechtecks Fig 149B benutzt worden ist. Dadurch ist der Axe ad bereits die bestimmte Länge gegeben und man hat noch auf die Verlängerung der zweiten Axe die lange Seite des Rechtecks in dc zu tragen. Ferner setze man auf die Axenlinien von d aus die Seiten des innern Rechtecks des Grundrisses in F' und g, ergänze die Parallelogramme, ziehe aus den Eckpuncten die isometrischen Höhenlinien und trage auf sie das gegebene Maß hh' und hn. Die Verbindungslinien, die nothwendig parallel den Axen sind, vollenden die isometrische Projection.

Zu 149, C'. Hier ist der isometrische Winkel mit der größern Seite des Grundrisses construirt worden; die Construction des isometrischen Bildes ist der vorigen ähnlich und einfach, wenn man nur die Höhenlinien in die richtigen Eckpuncte stellt und die Höhenmaße sämmtlich von den Puncten der isometrischen Grundebene aus aufträgt. Die isometrische Höhenaxe fällt hier in die Kante d des Grundrisses.

Zu 150a als Grundriß. Die Construction weicht in dieser Figur von den vorigen

---

schen Winkels mit der längern Seite im Grundriß bewirkt worden ist, daß man mit der kleinern Seite jedoch das gleiche Resultat würde erlangt haben.

darin ab, daß man zuerst die untere Stufe isometrisch fertig zeichnet, deren Grundebene das Parallelogramm abcd ist. Man betrachtet nun deren obere Grundebene als horizontale Projectionsebene, die Linien a^1d^1 und d^1c^1 als Axen und trägt auf diese die Abstände dh = gc in die beziehlichen Ecken, so daß man damit die Grundebene efg.. der zweiten Stufe zeichnen kann, welche man mittelst der Höhen*) wieder vollendet.

Nun betrachte man wieder die obere Ebene g'g''e'.. als horizontale Projectionsebene und bilde auf ihr, mittelst der Abstände hm,, mm,, die auf die beziehlichen Axen aufzutragen sind, die Grundebene klmi des Schaftes auf der Oberfläche der zweiten Stufe, ziehe die Höhenlinien und gebe ihnen das vorgeschriebene Maß, gleich ll'. Die obere Grundebene des Schaftes fällt in die untere Ebene der Deckplatte. Man kann sie sonach abermals als Projectionsebene betrachten; der isometrische Winkel ist dann i'm'l' und die Axen sind m'i' und m'l'. Verlängert man diese und benutzt die Abstände qm, und m,m, so läßt sich die untere Grundebene und die Deckplatte, deren geometrische Höhe gleich p'p'' ist, leicht construiren. Man kann jedoch den isometrischen Grundriß der Platte auch auf der obern Grundebene der zweiten Stufe in nopq und damit die Grundebene der Platte bilden, indem die Eckpuncte n' und p' auf den Horizontalen i'n', l'p' und auf den projicirenden Linien aus n und p liegen. Das obere innere Parallelogramm ist der obere

*) Die zugehörigen Höhen sind durch eine orthographische zweite Projection nicht besonders angegeben. Aus der Natur der isometrischen Projection geht hervor, daß cc' = gg' die geometrisch verjüngte Höhe der Stufen, ll' die des Mittelschafts und p'p'' die der Deckplatte ist.

Schnitt des Schaftes mit der obern Ebene der Platte, wenn man ihn bis zu dieser fortgeführt denkt.

Die isometrische Projection konnte auch davon abgeleitet werden, daß man auf die untere Projectionsebene den ganzen Grundriß Fig. 150a sofort isometrisch zeichnete und dann alle Höhen auf diese Ebene bezog. An Genauigkeit hätte dann wohl gewonnen werden können, jedoch hätten die vielen Linien in dieser Ebene, wozu sich noch die Höhenlinien gesellten, zumal bei Anfängern, ebenso leicht Verwirrung veranlassen können.

152. — Man sieht, daß die isometrischen Projectionen rechtwinklich und normal stehender Gegenstände und solcher, deren Hauptlinien sich einem Quadrat oder Rechteck natürlich anschließen, ungemein einfach sind, wenn man nur den Drehpunct schicklich annimmt und darauf achtet, daß die dritte Axe stets den isometrischen Winkel halbirt. Etwas zusammengesetzter wird die Construction, wenn die Körper viel schiefe Winkel haben oder schräggestellt sind, wie überhaupt die isometrische Projectionsmethode sich vorzugsweise für Gegenstände eignet, deren Haupt-Begrenzungsflächen die normale Stellung gegen einander haben.

153. — **Aufgabe.** Es soll das irreguläre fünfseitige Prisma abcde isometrisch projicirt werden (Fig. 151).

Es sei abcde Fig. 151a der erste Schnitt (die Grundebene) des Prisma's in orthographischer Projection. Die Natur dieser Ebene gestattet die Umschreibung eines Quadrats, auf dessen Seiten die Ecken und die Seite ae liegen. Im Allgemeinen sucht man das Quadrat oder Rechteck stets so zu legen, daß Hauptlinien und Ecken der eingeschriebenen Figur auf Seiten des Quadrats fallen. Man lege das Quadrat in isometrische Projection, indem

man die Ecke IV als Drehpunct annimmt und dadurch das isometrische Quadrat I, II, III, IV erhält. Für die Axen IV, I und IV, III gelten alle Maße des geometrischen Grundrisses, daher auch für die mit ihnen parallelen isometrischen Linien I, II und II, III. Trägt man auf solche die Abstände IVe, IVa, IVd...., so erhält man die Ecken des Polygons in isometrischer Darstellung; und errichtet man in diesen Ecken die Höhenlinien a_1a^2, b_1b^2...., macht jede der gegebenen Höhe gleich und verbindet die Endpuncte, so ist das Prisma isometrisch construirt.

154. — **Aufgabe.** Man soll die wahren Längen der Grundkanten aus der isometrischen Projection bestimmen (herabschlagen), (Fig. 151b).

Man erinnere sich, daß die Winkel an den Ecken des isometrischen Quadrats rechte Winkel vertreten, und daß die auf den Axen liegenden Puncte in ihrem wahren geometrischen Abstand verzeichnet sind. Die Seite **ae** ist also schon in ihrer wahren Größe vorhanden. Die Seite d_1e_1 ist die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks, dessen Katheten die Abstände IVe_1 und IVd_1 sind, welche ebenfalls in der isometrischen Figur die wahre Größe haben.

Bildet man daher Fig. 151b mit den Katheten IVe_1 und IVd_1 ein rechtwinkliches Dreieck, so ist dessen Hypotenuse die wahre Länge von e_1d_1. Ebenso construirt man für die Seite d_1c_1 das rechtwinkliche Dreieck d_1IIIc_1, dessen Katheten $IIId_1$ und $IIIc_1$ sind. Dessen Hypotenuse gibt die wahre Größe von d_1c_1. Ein Gleiches ist es mit den übrigen isometrischen Seiten, und die gefundenen Längen werden wieder mit denen des Grundrisses übereinstimmen. Das Folgende wird über das zu beobachtende Verfahren ausführlichere Erläuterung geben.

155. — **Aufgabe.** Es soll die geometrische Größe einer Linie AB im Raume aus ihrer isometrischen Projection gefunden werden (Fig. 152).

Die erste Projection der Linie sei Aa, die zweite a'b'. Denkt man die Linie im Raume durch AB repräsentirt, so muß nothwendig die erste projicirende Ebene ein rechtwinkliches Dreieck AaB sein und die wahre Größe der Linie wird sich ergeben, wenn man aus der horizontalen Projection Aa der Linie und der Projicirenden Ba ein rechtwinkliches Dreieck zusammensetzt, und wird dessen Hypotenuse sein. Dieses Dreieck ist hypothetisch in Fig. 152a construirt. In ihm ist aB aus Fig. 152 unmittelbar abzunehmen und hat die wahre Größe, weil parallel der Höhenaxe. Nicht so ist es mit der zugehörigen andern Kathete Aa, welche mit keiner der isometrischen Axen parallel ist; ihre geometrische Größe muß erst gefunden werden, um sie zur Construction des Dreiecks benutzen zu können.

Dies erfolgt, wenn man aus a eine Parallele mit der Axe G^0 nach der projicirenden Linie Ab' zieht. Da letztere parallel G_0 und normal G^0 ist, G_0 und G^0 aber die Axen vertreten, so ist das Dreieck adA in d rechtwinklich und ad wie dA haben geometrisches Maß. Construirt man daher in Fig. 152a zuerst mit Ad und ad, so ist dessen Hypotenuse die wahre Länge von aA Fig. 152, die zu Bildung des Dreiecks aAB Fig. 152a gebraucht wird.

Ebenso verfährt man, wenn der Durchgang A der Raumlinie in der ersten Projectionsebene unbekannt oder gleichviel nur das Stück BC der Linie bekannt wäre und die Länge dieses Stücks aus der isometrischen Projection gefunden werden sollte.

Es sind nemlich die Dreiecke afc und adA ähnlich, ebenso die Dreiecke BaA und CcA, cC gleich c''f. Man ziehe daher af und c''f parallel der isometrischen Axen und bilde mit diesen Linien als Katheten das rechtwinkliche Dreieck acf Fig. 152b, dessen Hypotenuse ac die wahre Länge der isometrischen Linie ac gibt. Man hat nun in dem Dreieck BCa' Fig. 152 die wahre Größe von Ca', nemlich c''a und Ba', womit ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden kann, welches in der Hypotenuse die wahre Länge von BC gibt.

156. — **Aufgabe.** Es soll die Pyramide Fig. 153, deren erste und zweite Projection in der Figur gegeben sind, isometrisch dargestellt werden (Fig. 153).

Man umschließe die erste Projection mit einem Rechteck I, II, III, IV, auf dessen Seiten die Seite b,d, und die Ecken a,c,e, der Grundebene liegen. Um diesem Rechteck die isometrische Lage zu geben, ziehe man Fig. 154 eine Lothrechte II'x, nehme auf derselben den Punct II' beliebig und beschreibe mit dem Radius II, I (Fig. 153) den Bogen I'xy, auf den man aus x denselben Radius nach I' und y trägt. Hierdurch ist ein isometrisches Quadrat gefunden, dessen Seite der längern Seite des umschriebenen Rechtecks gleich ist; setzt man in II'III' die kürzere Seite des Rechtecks und zieht Parallelen mit den beiden isometrischen Axen, so entsteht in I',II',III',IV' das Rechteck in isometrischer Projection, auf dessen Seiten alle Maße aus Fig. 153, die auf den gleichnamigen Seiten liegen, geometrisch übergetragen werden können. Man trage also die Abstände der Polygonsecken von den Ecken des umschriebenen Quadrats aus Fig. 153 nach Fig. 154 über und ziehe die Seiten ab, bd, de..., wodurch das Polygon isometrisch gebildet ist.

Um die Durchschnittsfigur a'b'c'd'e' in die isometrische Projection überzutragen, kann man deren Ecken durch rechtwinkliche Coordinaten bestimmen, die sich auf die Seiten des Rechtecks beziehen. Hier ist auf andere Weise verfahren worden. Man hat die Seiten der Durchschnittsfigur, die in keiner parallelen Beziehung mit den Seiten des Rechtecks stehen, nach dessen Seiten verlängert, die Durchschnittspuncte auf die isometrischen Axen übertragen und durch deren Verbindungslinien die isometrische Figur des Durchschnitts erhalten. Den Fußpunct t' der pyramidalen Axe bestimmt man durch die rechtwinkligen Coordinaten wt' und wIII.

Man hat dann aus den Ecken der Durchschnittsfigur Fig. 154 Parallelen mit der Höhenaxe zu ziehen und auf diese die wahren Höhen aus Fig. 153A zu tragen. Es ist nemlich a'a'' = a⁰a, b'b'' = b⁰b, c'c'' = c²c... zu machen. Zieht man noch die Verbindungslinien, so ergibt sich die isometrische Figur des Schnitts in a''b''c''d''e'', dessen Mitte in t'' ist.

Wie aus den isometrischen Linien die wahren Längen gefunden werden, ist aus dem Vorhergehenden bekannt.

157. — **Aufgabe.** Ein Dodekaëder (Pentagon-Dodekaëder), welches in Fig. 103 Taf. VIII in gleicher Größe orthographisch projicirt ist, soll isometrisch dargestellt werden.

Zu größerer Bequemlichkeit ist dessen erste Projection in Fig. 155d nochmals gezeichnet.

Man umschreibe wieder das Rechteck I,II,III,IV, so daß zwei Seiten und zwei Ecken in dessen Seiten fallen. Hat man nun das Rechteck in I'II'III'IV' isometrisch bestimmt, so kann man die Eckpuncte $o_1, i_1, h^1, i^1 o^1$ und u^1 geometrisch abtragen, da sie

auf den Axen oder Parallelen liegen. Es bleiben noch die Eckpuncte c^1, d^1, x^1 und z^1 isometrisch zu bestimmen. Diese Puncte liegen paarweise auf Parallelen der Seiten des Rechtecks. Man ziehe $x'x''$ parallel I, III, trage Ix'' in die Ecken des isometrischen Rechtecks, ziehe die Parallelen $z''x''$ und $c''d''$ und mache $c''c'$, $z''z'$, $d''d'$ und $x''x'$ gleich der Ordinate $x''x'$ Fig. 155d, wodurch diese Puncte bestimmt werden und das äußere isometrische Polygon ausgeführt werden kann.

Noch ist das innere Polygon oder Zehneck isometrisch zu zeichnen, welches keine Schwierigkeiten haben wird. Im Allgemeinen hat man in allen ähnlichen Fällen Hülfslinien aufzusuchen, welche mit den Axen parallele Beziehungen eingehen oder deren Richtpuncte sich durch die Durchschnitte mit den Axen oder andern parallelen Linien bestimmen lassen; oder man nimmt die Axen als Abscissen an und hilft sich durch rechtwinkliche Ordinaten, in Betracht, daß alle Theile der Axen und der mit ihnen parallelen Linien die gleiche Länge in der isometrischen Projection haben. Man sieht, daß der isometrische Grundriß auf mancherlei Weise erlangt werden kann und es nur darauf ankommt, die einfachste und sicherste zu wählen. In dem vorliegenden Falle, wo der gegebene Körper in eine zur Construction bequeme Stellung gebracht ist, muß ein Ordinatensystem vorgezogen werden.

Hat man nun die innern und das äußere Polygon gezeichnet, so ziehe man aus den Eckpuncten Parallelen mit der isometrischen Höhenaxe und mache diese gleich den beziehlichen normalen Höhen in Fig. 103 der zweiten Projection, wobei man wohl thut, jedes Fünfeck für sich abzuschließen, bevor man zu einem andern übergeht, weil sonst Irrungen unvermeidlich sind.

Werden isometrische Linien in wahrer Größe verlangt, z. B. ag, be', ao, so wird nach § 150 verfahren.

1) Für ag hat man das isometrische rechtwinkliche Dreieck a'pg', weil ag mit a'g' in einer Ebene liegt und der Winkel a'pg' ein isometrisch rechter Winkel ist. Bildet man daher ein solches mit den Katheten a'p und pg' Fig. 155a, so ist die Hypotenuse a'g' die wahre Länge der Kante ag.

2) Für ao, welche mit o,a' in eine Ebene fällt, ist zuerst die geometrische Länze von a'o, = a''o zu suchen, da diese Linie nicht in paralleler Beziehung mit den Axen steht. Man erhält sie in der Hypotenuse des rechtwinklichen Dreiecks Fig. 155b, dessen Katheten gleich o,m und a'm gemacht worden. Mit dieser und der Kathete aa'' bilde man ein zweites rechtwinkliches Dreieck, so ist die Hypotenuse die wahre Länge von ao.*)

3) Für be' findet das gleiche Verfahren statt. Das rechtwinkliche isometrische Dreieck ist e'b'b. Die Kathete bb' ist bereits ihrer wahren Länge nach vorhanden, die Kathete b'e' hat man aber mittelst des Dreiecks b'ne', welches in n rechtwinklich ist zu suchen, wie es in Fig. 155c geschehen ist.**)

Aus dem Dreieck bb'e' Fig. 155c ergibt sich in der Hypotenuse be' die geometrische Länge von der isometrischen Linie be'.

158. — In der abgehandelten Aufgabe ist dem Körper eine bequeme und für die Zeichnung Uebersicht gewährende Stellung und Wendung gegeben.

---

*) Es ist nemlich aa' normal der Grundebene, daher auch normal jeder in ihr liegenden Linie, die von deren Fußpunct ausgeht. Daher sind o,a'a und ma'a, desgleichen g'a'a rechte Winkel.

**) Man könnte auch b'e' aus der gleichnamigen Linie des orthographischen Grundrisses entnehmen.

Unzählbare andere werden auch soviel verschiedene isometrische Projectionen geben, und man sieht leicht, daß alle von der Lage des einschließenden Rechtecks abhängen. Nicht alle diese Projectionen gewähren einen vortheilhaften Ueberblick der Körperbildung, so daß anzurathen ist, die schickliche Stellung, die man dem Körper in isometrischer Projection zu geben hat, durch vorläufige Versuche und flüchtige Entwürfe zu ermitteln, bevor man mit der Construction beginnt.

In den meisten Fällen ist die Lage des einschließenden Rechtecks die vortheilhafteste, wo zwei Seiten der Projectionsaxe G^0 parallel liegen; würden aber bei dieser Annahme eine oder mehrere Begrenzungsflächen in der Projection als Linien oder sehr schmale Flächen erscheinen, dann ist es besser, dem Rechteck eine andere Wendung zu geben.

Vierter Abschnitt.

Die isometrischen krummen Linien und Figuren.

159. — Diejenige krumme Linie, die unter allen auf die einfachsten Gesetze hinweis't, ist der Kreis. Wenn dessen Projectionen nach der orthogonalen Methode eine Linie, ein Kreis, eine Ellipse sein kann, so findet man ihn isometrisch projicirt selten unter anderer Gestalt, als der einer Ellipse. Die geometrische Construction einer solchen genügt in der isometrischen Projection nicht; es sind aber durch das um- und eingeschriebene Quadrat hinreichende Hülfsmittel gegeben, die isometrische Projection des Kreises unmittelbar aus ihm mit der vollkommensten Genauigkeit oder auch annäherungsweise abzuleiten.

Das Verfahren im Allgemeinen ist schon bei den orthographischen Projectionen angewendet worden und wird auch bei den Centralprojectionen gebraucht. Die folgenden Aufgaben werden dessen Construction in isometrischer Beziehung erläutern.

160. — **Aufgabe.** Es soll ein Kreis auf der ersten Projectionsebene isometrisch gezeichnet werden (Fig. 156 und 156a).

Man umschreibe den Kreis mit einem Quadrat abcd, ziehe parallel den Seiten die beiden normalen Durchmesser, wie auch die Diagonalen des Quadrats. Aus 3 beschreibe man mit dem Radius m,3 den Bogen m,11 und trage die Sehne 6,11 von den Durchschnitten der Diagonale zu beiden Seiten auf die Peripherie. Hiedurch sind 16 Puncte der Peripherie gegeben, durch die man Parallelen mit den Quadratseiten zieht und damit eine Anzahl Coordinaten erhält, deren Anfangspuncte auf den Seiten des Quadrats liegen.

Man zeichne nun die isometrische Projection des Quadrats und trage jenes Ordinatensystem ein; die beziehlichen Durchschnitte nebst den Endpuncten der Durchmesser geben die Puncte 1 — 16, durch welche der isometrische Kreis zu legen ist, der als Ellipse erscheint.

161. — Zu Ersparung der vielen Hülfslinien läßt sich folgende einfachere Auflösungsmethode benutzen, welche zugleich eine allgemeinere Anwendung zuläßt, da sie, einmal construirt, auf alle möglichen Kreise angewandt werden kann. Bei genauer Betrachtung wird man nemlich unter den Linien der vorigen Construction folgende Beziehungen wahrnehmen:

1) die Seiten des kleinen Quadrats in den Ecken des umschriebenen, welches außerhalb des Kreises liegt, nemlich FcF^{1}6, sind, bis auf eine nicht zu achtende Differenz, gleich $\frac{3}{10}$ des Halbmessers.

2) Die Parallelen gn, ne'... theilen auf den Seiten des umschriebenen Quadrats den vierten Theil der Seite ab.

3) Der Kreisbogen 3,11 wird durch die Parallele e'n halbirt; ebenso der Bogen 2,12 durch gn. Ein jeder hat daher 30°.

Diese Umstände führen auf die Construction eines allgemeinen Maßstabes, wodurch die Puncte 5,6,7,8 der Ellipse aufgetragen werden können, ohne der obigen Hülfslinien zu bedürfen.

Man trage auf eine Gerade s,10 zehn beliebige gleiche Theile (Fig. 156b), beschreibe mit dieser Länge einen Bogen aus s und schneide ihn aus 10 mit dem Radius von $\frac{3}{10}$ oder 10,7 in p. Wenn man diesen Maßstab benutzen will, beschreibe man aus s mit dem Radius des gegebenen Kreises einen Bogen mn, trage dessen Sehne aus den Ecken des isometrischen Quadrats auf die Seiten in F''F,,.. und ziehe durch diese Puncte Parallelen mit den Axen, so schneiden sich diese in den Puncten 5, 6, 7 und 8 der Ellipse. Bei kleinern Ellipsen sind diese Puncte, nebst den Endpuncten 2, 3, 4, 1 der Durchmesser, schon hinreichend die Curve zu zeichnen; bei größern und zu genauerer Bestimmung sind noch die Puncte 9—16 nöthig.

Hierzu braucht man einen zweiten Maßstab.

Man beschreibe aus m einen Bogen oqn mit beliebigem Halbmesser und schneide ihn aus n mit gleicher Zirkelöffnung in o (Fig. 156,c). Den Bogen no halbirt man in q, fällt die Normale qr, nimmt mr, schneidet damit den Bogen on von n aus in m'' und zieht mm''. Der Winkel m''mn schließt alle Sehnen ein, welche für gegebene Kreise die Puncte 9—16 der Ellipse bestimmen. Man zieht nemlich aus m mit dem Halbmesser des gegebenen Kreises einen Bogen bb', trägt dessen Sehne von

1, 2, 3, 4 aus zu beiden Seiten auf die isometrischen Axen und zieht durch diese Puncte Parallelen. Diese schneiden die Halbirungslinien g,15; e,,,9; g'',14... in den verlangten Puncten, und geben mit den vorherbestimmten 16 Puncte die Curve.

162. — Die Construction des Maßstabes Fig. 156,c kann vereinfacht werden, wenn man den Winkel m''mn unmittelbar mit dem Transporteur aufträgt. Es ist nemlich der Bogen on der sechste Theil des Kreises, da die Sehne als Seite eines regulären Sechsecks construirt worden, daher qn der zwölfte Theil und der Winkel qmn = 30°, qr dessen Sinus, mr der Cosinus. Für mq = 1 ist mr = 0,86602... = m''n, daher die Sehne eines Bogens von 51°19', ungefähr 51⅓°.

163. — Bei größern Kreisen, und wo es sich um größere Genauigkeit handelt, kann man statt des Quadrats ein umschriebenes 8, 16, 32 Eck construiren.

Besonders gibt das Achteck bei kleinern Kreisen eine leichte Construction der Ellipse, da es durch einen einzigen Bogen aus dem Quadrat folgt. Man ziehe aus den Ecken abcd mit einem Radius gleich der halben Diagonale = cm Bogen (Fig. 161 Taf. XVI). Wo diese die Quadratseiten in 1,2,3,4.... schneiden, liegen die Ecken des regulären Achtecks. Es bedarf daher nur des Bogens qm2 um den Abstand b2 gleich dq zu erhalten, den man in dem isometrischen Quadrat aus den vier Ecken auf die Seiten trägt. Zieht man die Verbindungslinien dieser Puncte, so hat man acht Tangenten der Ellipse und kann diese leicht einzeichnen. So sind sr, pq, on solche Tangenten für die beziehlichen Kreise und aus den Quadratecken d,,d und d' hervorgegangen.*)

---

*) Mehrere der Constructionsarten und viel andere, die von großem Nutzen für die Praxis bei den verschiedenen Pro-

164. — **Aufgabe.** Die isometrische Darstellung eines Kreises im Raume betreffend.

Das Parallelogramm, welches einen Kreis umschließt, dessen orthographische Projection in eine isometrische umgewandelt werden soll, ist nicht immer ein Quadrat, sondern häufig ein anderes Rechteck. Dieses wird dann bedingt, wenn der Kreis im Raume eine solche Lage einnimmt, daß er schräg gegen die Projectionsebenen G^1 und G^2 liegt.

Es sei (Fig. 157, A, B und C) z. B. abcd Fig. 157A ein den Kreis in horizontaler Projection einschließendes Quadrat $ab^1c^1d^1$, dessen Projection nach einer Drehung, die es in der senkrechten Lage gegen die zweite Projectionsebene, aber in einem Neigungswinkel α gegen die erste Ebene stellt. Nach einer zweiten Drehung, welche auch die normale Lage gegen die verticale Projectionsebene aufhebt, dabei aber die Abstände aller Puncte von der ersten Projectionsebene unverändert läßt, also auch den Neigungswinkel α, erscheint das Quadrat, wie Fig. B in erster und Fig. C in zweiter Projection zeigt.

Es sei nun das Parallelogramm I,II,III,IV die isometrische Projection eines so verwendeten Quadrats und die obige Aufgabe darauf zu beziehen, daß in diese isometrische Projection ein Kreis eingeschrieben werde: so halbire man die Seiten in a, b, c und d, suche nach §. 157 die Bestimmungspuncte auf den Seiten oder die isometrischen Seiten des isometrischen Achtecks auf, wodurch dann die Ellipse leicht eingezeichnet werden kann. Da man hier aber kein isometrisches Quadrat, sondern ein isometrisches

---

jectionsarten sind, findet man in meiner Sammlung von 574 geometrischen Aufgaben mit ihren Auflösungen und Beweisen. Leipzig, Baumgärtner."

Rechteck von verschiedener Seitendimension hat, so modificirt sich jenes Verfahren dahin, daß die Bestimmungspuncte für die kurzen und für die längern Seiten besonders aufgesucht werden müssen. Die Puncte e,k,i,h... liegen auch hier in den Vierteln der beziehlichen Seiten.

Um die große Axe einer solchen Ellipse zu bestimmen, beschreibe man aus dem Mittelpunct m beliebige Kreisbögen qr und st, halbire die Theile, die zwischen der elliptischen Curve liegen, und ziehe durch die Halbirungspuncte die Linie xy, in welcher die große Axe liegt.

165. — **Aufgabe.** Es soll eine unregelmäßige krummlinige Figur isometrisch dargestellt werden.

Bekanntlich kann man eine aus freien Linien bestehende Zeichnung oder ein System von Puncten leicht in derselben Größe oder nach einem gewissen Verhältniß copiren, daß man über das Original und das Blatt, welches die Copie aufnehmen soll, ein Netz von Quadraten legt, und die in ein Quadrat fallenden Linien und Puncte (nach dem Augenmaße oder mittelst Instrumenten) durch Coordinaten, auf die Seiten beziehlich, bestimmt.

Auf dieselbe Weise läßt sich die Lösung der obigen Aufgabe behandeln (Fig. 160, A und B), wozu die Figur die nöthige Anleitung gibt. Man hat demnach das Quadrat oder Rechteck, welches man um die orthographisch gezeichnete Figur legen kann, sowie die isometrische Projection desselben in eine gleiche Anzahl Quadrate (oder Rechtecke) zu theilen und die wesentlichen Puncte der Zeichnung durch die Abstände von zwei aneinanderliegenden Quadratseiten in die isometrische Figur einzutragen. Man wählt dazu gern die zunächstliegenden Quadratseiten und versichert sich zuweilen noch der Ge-

nauigkeit durch die Lage der Linien gegen die Diagonalen.

166. — **Aufgabe.** Es soll der aus mehreren Cylindern und einem Würfel zusammengesetzte Körper isometrisch dargestellt werden (Fig. 162).

Es genügt in den meisten Fällen bei der isometrischen Darstellung eines Objects, daß die Dimensionen in Maßen und im Croquis gegeben sind, ohne daß eine ausgearbeitete orthographische Projection vorliegt; hauptsächlich dann, wenn die Mehrzahl der Kanten die Lage der isometrischen Axen haben, weil dann die verjüngten Maße ihre unmittelbare Geltung behalten. Ein Beispiel davon sei in der vorliegenden Figur gegeben. Zuvor mögen einige practische Bemerkungen ihre Stelle finden, wie man bei der Vermessung eines plastischen Gegenstandes zu verfahren hat.

Bevor man die Messungen beginnt, fertige man einen Entwurf nach dem Augenmaße. Je näher man in ihm den Verhältnissen bleibt, desto mehr erleichtert man sich die spätern Arbeiten. Man mißt zuerst die bestimmenden Dimensionen der Haupttheile und schreibt sie den betreffenden Linien in der Richtung der geschehenen Messung bei. Ein Gleiches nimmt man mit den untergeordneten Theilen vor. Dabei ist zu beachten, daß die beigeschriebenen Maße nicht zu eng zu stehen kommen oder auf unrechte Linien bezogen werden, noch sonst Irrthümer veranlassen können.

In diesem Fall, und wenn der oder jener specielle Theil zu klein ist, entwirft man ihn abgesondert und in größerm Verhältniß, sucht auch dadurch vorzubeugen, daß man von dem Theil ab einen längern Strich seitwärts zieht, an den man das Maß schreibt. Den Parallelismus von Linien,

rechte Winkel, die fortsetzende Richtung jenseits einer Unterbrechung, und dergleichen müssen in dem Brouillon sorgfältig bemerkt werden; auch ist es zu Vermeidung künftiger Ungewißheit gut, wenn man Maße an verschiedenen Stellen zugleich einträgt, wenn sie gleich sind.

Je ausführlicher der Brouillon angelegt worden, desto leichter und bequemer kann man später nach ihm projiciren. Vorzüglich ist genau zu überlegen, welche Dimensionen bei dem Projiciren unentbehrlich sind, damit man nicht eine Messung versäume, die späterhin oft nicht nachgeholt werden kann. Immer ist es besser, mehr Maße als zu wenig zu nehmen. Im ersten Fall gewährt es eine gute Controle, im zweiten führt es oft zu großen Verlegenheiten. Zuweilen werden auch einige kurze Beschreibungen von diesem und jenem Theil, Ansichten verschiedener Seiten, einzelne Grund- und Aufrisse, Durchschnitte 2c. nöthig. Uebung ist auch hier die beste Lehrmeisterin.

Der hier gegebene Körper erfordert dergleichen nicht; er ist einfach genug, daß es nur des einzigen Entwurfs bedarf und mag zuerst den flüchtigen Entwurf vorstellen, dem die nöthigen Maße beigeschrieben sind. Zu bemerken ist, daß die Ansätze des Würfels vollkommen rechtwinklich abgeschnittene Cylinder sind; auch die Hohlung C ist ein solcher.

Der vordere Cylinder **D** ist concentrisch ausgehöhlt und der Länge nach radial ausgeschnitten. Dieselbe Aushöhlung und gleicher Ausschnitt setzt in dem hintern Cylinderstück fort, nur ist in dieser der ausgebohrte Kern gleichsam wieder eingeschoben. Der hohle Raum C an der Würfelseite ist 0,22 tief. Sämmtliche Cylinder stehen mit ihrer Axe senkrecht auf den Mitten der Würfelseiten.

Es ist überflüssig, die isometrische Projection des Körpers zu erläutern. Es möge als Anwendung des Vorgetragenen eine Uebung sein.

167. — **Aufgabe.** Ein Kegel, der von der Ebene P schräg geschnitten wird, soll isometrisch gezeichnet werden (Fig. 163, 163a).

Die erste Projection des Kegels ist der Kreis mbn (Fig. 163), die des Schnittes ist die Ellipse ac'b, beide nur zur Hälfte dargestellt. Die zweite Projection des Kegels ist aus dem Fragment mab'n zu entnehmen; der Schnitt ist senkrecht der zweiten Projectionsebene in der Richtung P gelegt, der erste Schnitt der Ebene P ist in dem Punct o projicirt.

Die Ellipse als isometrische Projection der Grundebene wird nach den bekannten Regeln construirt, die hier keiner Wiederholung bedürfen.

Da die große Axe des Schnittes in der Ebene P liegt, so muß sie auch durch den Punct o Figur 163 gehen. In Fig. 163a liegt diese Axe a'o' zugleich in der senkrechten Ebene a'a''o'b', deren isometrischer Schnitt auf der Horizontalebene die Linie a''o' ist, nemlich die isometrische Projection der Linie ao Fig. 163. Hat man diese Projection construirt, welche nothwendig durch den Mittelpunct s gehen muß, so construire man das isometrische Rechteck pqrs, aus dem geometrischen asrb. Dieses ist die isometrische horizontale Projection des Rechtecks p'q'r's', in welchem die Ellipse des Kegelschnittes eingeschrieben ist. Das Rechteck p'q'r's' wird gefunden, wenn man aus den Ecken der horizontalen Projection Parallelen mit der dritten isometrischen Axe zieht, pp', a''a', s,s' gleich aa', qq', b''b', rr' gleich bb' Fig. 163 macht und das Rechteck vollendet. Das Einschreiben der Ellipse muß als bekannt vorausgesetzt werden. Man bemerke noch, daß die Seiten p's' und q'r' parallel den Axen I,II und I,IV sind.

168. — Wir fügen den obigen noch einige Uebungsaufgaben der zweiaxigen isometrischen Pro-

jection bei, die **Weißbach** unter dem Namen „monodimetrische Projection" aufgestellt hat, da bei ihr nur zwei der isometrischen Axen in gleichem Verhältniß verjüngt auftreten, die dritte aber eines andern Maßstabes bedarf.

169. — Wenn nun auch die **dreiaxige** isometrische Projection, wie mehrfach bemerkt, sehr bequem für den Techniker dadurch wird, daß alle auf den drei Hauptaxen liegenden oder mit ihnen parallelen Linien die geometrische Länge haben und daher ohne Weiteres auf dem Verjüngungsmaßstabe abgenommen werden können: so gewährt doch das isometrische Bild dieser Methode eine ungewohntere Anschauung, es scheint weniger aufrecht zu stehen, zumal wenn es Gegenstände darstellt, die man gewöhnlich nicht von einer größeren Höhe herab sieht, wo also der Horizont des Auges tiefer liegt.

Beide isometrische Projectionsmethoden haben das gemein, daß alle Linien, welche einer Axe parallel liegen, unmittelbar geometrisch gemessen werden können; jedoch haben bei letzterer nur die auf zwei der Axen beziehlichen einerlei Verhältnisse, das Verhältniß der auf die dritte Axe Bezug nehmenden Linien bedarf einer anderweiten Bestimmung.

170. — Indeß überwiegen die Vorzüge der zweiaxigen Methode den Gebrauch eines doppelten Maßstabes, der zudem durch einfache Hülfsmittel auf den eines einzigen zurückgeführt werden kann, um Vieles, zumal bei Gegenständen, deren Haupttheile normal gegeneinander stehen, wie Holz- und Steinverbände, Durchschnitte von Bauwerken, Ofeneinrichtungen, Tischlerarbeiten und dergleichen.

171. — Da bei dieser Methode nur zwei der isometrischen Axen, gleichviel welche, in gleichem Verhältnisse erscheinen, so heißt sie die **zweiaxige** isometrische Projectionsmethode, oder (nach **Weißbach**) die **monodimetrische** Projection.

Unter allen denkbaren Verhältnissen, in welche die eine Axe zu den beiden andern eingehen kann, ist das einfachste 1 : 1 : $\frac{1}{2}$ (oder 2 : 2 : 1), wobei die Winkel, welche die Axen unter sich bilden, 131° 24,5'; 131°24,5' und 97°11' betragen.

Es soll Aufgabe des Folgenden sein, die allgemeine Begründung der zweiarigen Methode, die schon im zweiten Abschnitt erwähnt wurde, und die der allgemeinste Fall der isometrischen Methode ist, darzulegen: der allgemeinste Fall, weil,

sobald zwei Axen gleich, die dritte beliebig (größer oder kleiner) verjüngt genommen werden kann, allen diesen denkbaren Fällen sich auch dieser als specieller Fall einreihet, wo die Verjüngung der dritten Axe in ein gleiches Verjüngungsverhältniß mit den beiden andern tritt; so wie der, wo die dritte Axe die Hälfte einer der gleichen wird. Man kann nun die horizontalen Axen gleich und die Höhenaxe nach einem andern Verhältniß verjüngt, oder eine der horizontalen Axen und die Höhenaxe gleich, die andere horizontale anders verjüngt erscheinen lassen, wie es die Umstände und die Form des Gegenstandes verlangen. Denn bekanntlich läßt jede der drei geometrischen Ausdehnungen sich als Höhe betrachten.

Dieses scharf ins Auge gefaßt, wird man in der Abhandlung über die dreiarige isometrische Projection ausreichende Mittel finden, die zweiarige nach Befinden in Anwendung zu bringen, weshalb hier eine weitere Ausführung über die allgemeine Begründung derselben nur Wiederholung sein würde.

172. — Wir wollen nur noch Einiges über die Vorzüge und Mängel der isometrischen Methode hier zusammenfassen.

Die Leichtigkeit, mit welcher Projectionen nach der dreiarigen isometrischen Methode dargestellt

werden können, weil hier alle Längen auf den drei Coordinatenaxen nach einem und demselben verjüngten Maßstab geometrisch aufgetragen werden, und die Einfachheit, mit welcher Längen, die nicht auf den Axen oder mit ihnen parallel liegen, ihrem wahren Verhältniß nach ermittelt werden können, macht diese Projectionsweise vorzüglich zum Zeichnen technischer Gegenstände, Maschinen 2c. geschickt. Sie gibt Grundriß, Aufriß und Seitenansicht zugleich, die Winkel des Bildes aber sind verzogen. Demungeachtet gewährt sie eine faßliche und klare Vorstellung von dem Gegenstande, eingänglicher als das Bild nach der Centralprojection. Denn während diese alle parallele Linien convergirend erscheinen läßt, ist der Parallelismus der Kanten in der isometrischen Projection eine dem Auge so gewohnte Erscheinung, daß der Sehsinn die Verkürzung der Formen leichter abstrahirt, als umgekehrt.

Die Einfachheit der Mittel bei isometrischen Constructionen und ihre leichte Uebersetzung in das wahre Verhältniß gibt ihnen den Vorzug vor allen andern Projectionsarten, zumal wenn die Hauptbegrenzungslinien des Gegenstands größtentheils mit den Hauptaxen parallel liegen, oder in eine solche Stellung gebracht werden können; und wenn durch das isometrische Bild ein Gegenstand dargestellt wird, den man von einem höherliegenden Standpunct zu betrachten gewohnt ist. Bei Interieurs, wo die Decke eine Seite der Darstellung zu schließen hat, ist daher die isometrische Methode nicht brauchbar.

173. — Die zweiaxige Methode bewährt sich besonders zu Darstellungen der Krystallographie; sie gestaltet sich am einfachsten, wenn das Verhältniß der dritten Axe zu den gleichen ersten wie 1 : 2 genommen wird. Das zweiaxige isometrische Bild gibt den Gegenstand in mehr aufrechter, daher dem

Auge zusagendern Stellung, als das dreiaxige isometrische Bild und wird deshalb einen gefälligern Gesammtausdruck hervorbringen. Diese Methode hat mit der dreiaxigen gemein, daß sie vorzüglich die den Hauptaxen parallelen Linien leicht nach ihrer geometrischen Abmessung erkennen läßt, jedoch zweier Verjüngungsmaßstäbe bedarf. Auch sie ist am brauchbarsten, wenn die Gegenstände meist rechtwinkliche Begrenzungsflächen hat.

174. — **Aufgabe**. Es soll das Prisma Fig. 164 nach der zweiaxig isometrischen Projectionsmethode dargestellt werden. (Fig. 164,a,b,c,d,e).

Das Prisma ist durch das Quadrat Fig. 164a in gewöhnlicher erster Projection gegeben; es wird von einer Pyramide durchdrungen, deren Spitze in S projicirt ist, deren Grundebene mit der des Prisma zusammenfällt.

Die zweite, aber um den Winkel α gedrehte Projection des Doppelkörpers zeigt sich in Fig. 164,b, so daß Ss die Axe der Pyramide, a'a, die geometrische Länge der Kante des Prisma's ist.

Denkt man den ursprünglichen Stand desselben mit der Grundebene a,b,c, auf der ersten Projectionsebene, und die parallelen Gesichtsstrahlen in der anfänglichen Richtung rc, auf den Körper gerichtet, diesen dann so gedreht, daß die Richtung des Strahls senkrecht auf G^0, aber parallel der zweiten Projectionsebene in c,r Fig. 164,b zu stehen kommt: so wird sich die erste Projection nach Fig. 164,c gestalten. In dieser sind die wahren Dimensionen verloren gegangen; es wird daher nöthig, diese wieder aufzufinden, um die isometrische Darstellung, worin die Kanten ab und bc die wahre geometrische Größe haben müssen, bewirken zu können.

Man verlängere deshalb a,b, und mache die Verlängerung a'b,, gleich ab. Durch diese Verlän-

gerung tritt jedoch die Höhe a,c' Fig. 164,c aus ihrem Verhältniß zu den Kanten und muß demgemäß abgeändert werden.

Da nun ab' diese Höhe für a,b, in a abschneidet, so muß auch eine Parallele mit dieser Linie durch b,, die für die Kantenlänge a,b,, verhältnißmäßige Höhe bestimmen, welches in c' geschieht, und man erhält nun die zweiaxige isometrische Darstellung des Prisma's auf folgende Weise.

Man construire mit der Seite a,b,, Fig. 164,c ein Rhombus A,B,C,D, Fig. 164,e, dessen stumpfer Winkel gleich dab Fig. 164,c ist; ziehe durch die Ecken die Höhenkanten parallel mit der dritten isometrischen Axe, die stets in der Halbirungslinie des stumpfen Winkels liegen muß, mache jede der Kanten gleich a,c' Fig. 164,c und verbinde die Endpuncte. Hiermit ist das Prisma isometrisch construirt.

In dieser Figur sind nun folgende Beziehungen vorhanden:

a) Die Winkel des Rhombus vertreten rechte Winkel, und dessen Seiten sind gleich den Grundkanten des gegebenen Prisma's, sowie alle mit dessen Seiten parallele Linien die wahre Länge (nach dem angenommenen verjüngten Maßstabe) haben.

b) Die Höhenkanten stehen senkrecht der Grundebene, sind aber, wie alle mit ihnen Parallelen, in demselben Verhältniß größer oder kleiner, als diejenigen Linien, deren Projectionen sie bilden.

c) Die isometrische Größe aller mit der dritten Axe parallelen Linien wird aber in der vierten Proportionallinie von a'a, Fig. 164,b*), von a,c**) und von der geometrischen Größe der zu suchenden Linie gefunden.

---

*) Welches die geometrische Höhe.

**) Als der gefundenen isometrischen Höhe.

Soll nemlich die isometrische Höhe der Pyramide gefunden werden, so ist:
a'a, (Fig. 164,b) : a'c, (Fig. 164,c) = Ss (Fig. 164,b) : x (oder sS' Fig. 164,e.

Man kann sich zu der Lösung dieser Proportion der bekannten Construction Fig. 164,d bedienen oder nach der in Fig. 165 verfahren (Fig. 165a).

Bei der letztern bildet man ein gleichseitiges Dreieck pmm', dessen Seite gleich a'a, verlängert mm', macht mm'' gleich a,c' und zieht pm''. Bei der Anwendung dieses Proportionalmaßstabes beschreibt man mit sS aus p den Bogen o6, zieht dessen Sehne bis zur Linie pVI, so ist oVI die gesuchte vierte Proportionale sS'.

Soll die isometrische Linie in demselben Verhältniß verkleinert werden, so geschieht dieses auf gleiche Weise, nur mit Versetzung der Glieder. Ebenso läßt sich durch dies Verfahren aus jeder isometrischen Höhe die geometrische wieder ableiten.

175. — **Aufgabe.** Man soll den Obelisk Fig. 165A nach der zweiaxigen isometrischen Methode zeichnen (Fig. 165, A, B, C und D).

Fig. 165 sei die erste orthographische Projection des gegebenen Obelisken und Fig. 165A dessen zweite Projection. Die Richtung, nach welcher der Gegenstand dargestellt werden soll, ist durch die Schnitte SR und S'R' gegeben.

Man beschreibe um den Grundriß ein Quadrat, in welchem die eine Diagonale parallel, die andere normal RS liegt. Man suche den stumpfen Winkel des isometrischen Quadrats. Zu diesem Zwecke zieht man AC Fig. 165B parallel RS von beliebiger Länge und nimmt AC als Diagonale eines Quadrats ABCD. Nun fälle man aus dem Mittelpunct dieses Quadrats und aus A die Normalen

Aa, B'S' auf die Axe gehörig verlängert. Durch S' ziehe R'S' parallel R'S' Fig. 165A, wodurch die Senkrechte aus A in h geschnitten und die Linie ah bestimmt wird.

Man betrachte nun das Quadrat ABCD als Grundebene eines Prisma's, dessen Höhe ah ist, und drehe es um den Mittelpunct, bis die Diagonale AC in A'C', DB in S'B' fällt, wodurch die nothwendige isometrische Lage erlangt wird.

Die Höhe des Prisma's wird dann in a'h' und die Linie S'h in S'h' fallen.

Ferner drehe man das Prisma so lange um die Linie B'D' als Axe, bis die Linie S'h' in der Lage S'h'' auf G^0 senkrecht steht, wodurch die Höhenkante a'h' in h''III' fällt. Es ergibt sich dann die erste Projection des Punctes III' in III und die von h'' fällt in den Mittelpunct des Quadrats, während die Puncte D' und B' ihre frühere Lage behalten.

Die ersten Projectionen der Seiten A'D' und A'B' sind daher die Linien IIID' und IIIB' und schließen den gesuchten Winkel der zweiaxigen isometrischen Linien D'IIIB' ein, dessen Schenkel II III und IV III gleich der Quadratsseite AB zu machen sind. Man ziehe noch I II parallel B'D'.

Um den Höhenmaßstab zu construiren, ziehe man Fig. 165C beliebig o VI, trage ah nmal (hier 6 mal) von o nach 6, eben soviel mal die Länge III I von o nach VI; über o6 construire man das gleichseitige Dreieck op6 und ziehe pVI und p6. Hierdurch ist der Maßstab für die dritte Axe und deren Parallelen gefunden.

176. — Nach dieser Vorbereitung kann man zu der Projicirung des Obelisken selbst schreiten.

Man construire Fig. 165D einen Rhombus I, II, III, IV, worin der stumpfe Winkel dem II III IV Fig. 165B gleich ist und durch die dritte Axe s'S

halbirt wird, dessen Seiten aber gleich der Linie I II Fig. 165 sind; trage IIA oder IB Fig. 165 auf die isometrischen Axen Fig. 165D über und ziehe das eingeschriebene isometrische Quadrat (oder Parallelogramm) ABCD, welches die Grundebene der Stufen bildet.

Zu Bestimmung der isometrischen ersten Projection aller übrigen Grundebenen, verlängere man in Fig. 165 deren eine Seite nach a.b,c,d und e, trage die Abstände von A in Fig. 165D von A aus nach den gleichnamigen Puncten über und ziehe durch sie Parallelen mit den Axen, welche von den Diagonalen AC und BD in den Eckpuncten (1, 2...5 der einen Diagonale) geschnitten werden.

Es bleibt nun übrig, die Höhen in jedem dieser Puncte auf der aus ihm gezogenen Normale mittelst Fig. 165A zu bestimmen. Diese Höhen haben in Fig. 165D ihre Fußpuncte sämmtlich auf der Grundebene, also in Fig. 165A auf der Grundlinie ab.

Um die isometrische Höhe mM zu suchen, nehme man m'm'', beschreibe mit diesem Radius Fig. 165C einen Bogen mm' und ziehe mm'', so ist dieses die gesuchte Höhe. Trägt man diese auf die Normalen der vier Eckpuncte und verbindet die Höhenpuncte, so ergibt sich das obere Rhombus MN, auf dessen Diagonalen die Normalen, aus den mit 4 correspondirenden Puncten, die Grundebene der Pyramide abschneiden, die in der Ebene des Rhombus MN liegen. Hat man eine der über ABCD liegenden Grundebene gefunden, dann kann man auch von dieser aus die folgenden Höhen auftragen. Man verfährt nach und nach mit den übrigen Höhen auf gleiche Weise und vollendet die Pyramide, die hier des Raumes wegen durch einen Querschnitt gekürzt ist.

Dritte Abtheilung.

Centralprojection oder Perspective im engern Sinne.

Erster Abschnitt. Allgemeine Bemerkungen.

Erstes Kapitel. Von dem Sehen.

1. — Wenn das Auge aus der hypothetischen Ferne, die in das Unendliche übergeht, in welcher wir ihm bei der orthographischen Projection seine Stelle angewiesen hatten, in einen solchen Abstand von dem Gegenstand rückt, daß es seiner physischen Beschaffenheit nach den Gegenstand wahrnehmen kann, und es wird die Aufgabe gestellt, den Gegenstand so darzustellen, wie ihn das Auge wirklich sieht, so tritt die Centralprojection an die Stelle der orthographischen Projection, oder die Perspective im engern Sinne.

2. — Im Allgemeinen nennen wir „Perspective", die Lehre, einen Gegenstand in der Natur auf der Zeichnenebene so wiederzugeben, wie er dem Auge von einem gewissen Standpunct aus erscheint. Je nach dem verschiedenen Standpunct wird ein Gegenstand plastischer Natur eben soviel

verschiedene Ansichten bieten; es werden sich Theile an ihm verdeckt, andere in scheinbarer Verkürzung, einige vortretend, einige zurückweichend, der und jener in ganz anderer Form und Größe darstellen: alle aber werden vereint dem Auge ein Bild bieten, woraus es sich die naturgemäße plastische Gestaltung ableitet. Es wird also dem Auge nach optischen Gesetzen ein Bild in einer begrenzten Fläche vorgeführt, woran es alle Formmodificationen wieder erkennt, die es von der Kindheit an gewohnt ist, an dem Naturgegenstand zu sehen; so daß die eingeübte Gewohnheit das Plastische herauszufinden auch an dem Bilde sich bewähren kann.

Dabei kann es sich freilich ereignen, daß dem in Zeichnungen weniger Heimischen die oder jene Gestaltung des perspectivischen Bildes auffällt, nicht naturgemäß erscheint; dies kann jedoch — bei übrigens regelrechter Zeichnung — nur davon herrühren, daß dem perspectivischen Bild die Hülfen abgehen, wie Licht und Schatten, kräftigeres und matteres Hervortreten, angrenzende Gegenstände 2c., welche dem Blick in der Natur das Uebersetzen des flachen Bildes in die plastische Form erleichtern, und welche ihm durch Gewöhnung unentbehrlich geworden sind; oder daß der Stand des Auges unpassend angenommen wurde.

3. — Der Act des Sehens besteht lediglich darin, daß die Affectionen der Nervenhaut im Auge — auf eine uns freilich unerklärliche Weise — zum physischen Bewußtsein kommen. Eigentlich nehmen wir also nur einen bestimmten Zustand, einen gewissen Reiz der Netzhaut wahr; daß wir aber diese Wahrnehmung nach Außen verlegen, daß wir die Bildchen der Netzhaut gleichsam in Anschauungen der Außenwelt verwandeln, ist Sache eines unmittelbaren Urtheils. In diesem Urtheil haben

wir durch fortwährende übereinstimmende Erfahrungen eine solche Sicherheit erlangt, daß es mit der Empfindung in Eins verschmelzt, daß wir die Netzhaut gar nicht als wahrnehmendes Organ empfinden, daß wir die unmittelbaren Empfindungen mit Dem verwechseln, was nach unserm Urtheil die Ursache derselben ist. Diese Substitution des Urtheils geschieht ganz unwillkürlich, sie ist uns, so zu sagen, zur andern Natur geworden.

4. — Mit der durch das Gesichtsorgan vermittelten Vorstellung der außer uns befindlichen Dinge, verbinden wir auch eine Vorstellung von ihrer Größe und Entfernung.

Die Bildchen auf der Netzhaut liegen nur nebeneinander, und wenn wir in diesem Spiegelbildchen die entsprechenden Gegenstände nicht als unmittelbar nebeneinander, in einerlei Weite vom Auge, sondern in verschiedener Ferne liegend erkennen, wenn wir die unendlich kleinen Abspiegelungen auf dem Hintergrund des Auges in die, im Verhältniß zuweilen unendlich großen Dimensionen der Naturkörper übertragen, so ist dies nicht Sache der unmittelbaren Empfindung, sondern des Verstandes, eines unmittelbaren, unbewußten, mit dem Moment der Abspiegelung zusammenfallenden Urtheils, welches wir allein durch die Erfahrung (den Tastsinn) von dem ersten Leben an begründet haben.

Das a b s t r a c t e Sehen ist sonach himmelweit von dem unterschieden, wozu es die Seele verarbeitet, und wie es in uns Bewußtsein wird.

5. — Diese Betrachtungen müssen es dem Zeichner wünschenswerth machen, den Bau des Auges und die Functionen seiner Theile genauer kennen zu lernen, um daran die Regeln seiner Wissenschaft zu knüpfen.

Zweites Kapitel.

Von dem Auge.

6. — Wir nehmen hier nur diejenigen Theile des Auges in Betracht, die unmittelbar bei dem Sehen wirken.

Das künstliche Organ des Sehens, das Auge, besteht aus mehreren Hüllen oder Membranen, und enthält verschiedenartige Feuchtigkeiten. Der Haupttheil desselben ist der Augapfel (**bulbus oculi**) (Fig. 1 und 2)*), ein rundlicher Körper, der in der conischen aus Knochen gebildeten Augenhöhle liegt und von außen durch die Augenlieder geschützt ist. Der Augapfel ist durch sechs Muskeln **s**, s, 19, 19, beweglich, die aus den Knochen der Augenhöhle entspringen und auf der weißen Haut befestigt sind; ihre gemeinschaftliche Anspannung, wenn man einen Gegenstand etwas scharf fixirt, verursacht, daß der Augapfel etwas hervortritt, wodurch eine Schärfung des Bildes auf der Netzhaut bewirkt wird.

Die einzelnen Theile des Auges sind:

1. — die harte äußere weiße Haut d,d,1,1**) bildet die eigentliche Form des Auges und schließt die übrigen Theile ein.

Ueber ihre innere Seite ist ein zartes, schwarzbräunlich gefärbtes Zellgewebe verbreitet***), welches die Gefäßhaut befestigt; die äußere aber ist von einem zarten Zellgewebe bedeckt. Sie ist nicht vollkommen undurchsichtig.

---

*) Figur 1 zeigt den senkrechten Durchschnitt des linken Auges eines Mannes in natürlicher Größe; Fig. 2 den horizontalen Durchschnitt eines weiblichen Auges der rechten Seite.

**) Tunica sclerotica (von σκληρός, hart), alba cornea opaca, la sclérotique, ou cornée opaque.

***) Lamina fusca.

2. — Die Hornhaut*) bildet den vordern etwas erhabenen, sphäroidisch gekrümmten Theil der weißen Haut 2,F.

Man unterscheidet an ihr den mit der weißen Haut verbundenen, meistens von dieser etwas überdeckten Rand, die vordere von der zarten und durchsichtigen Bindehaut oben und unten überzogene, und die hintere ausgehöhlte, mit einer besondern Haut bekleidete Fläche.

Im normalen Zustande ist sie völlig durchsichtig und farblos.

3. — Die braune Haut, Gefäß- oder Aderhaut**) liegt innerhalb des ganzen Umfangs der weißen Haut an deren innerer Fläche, mit der sie durch ein Zellgewebe (lamina fusca) zusammenhängt. Hinten ist sie mit der innern Hülle des Sehnervs durch Zellgewebe verbunden. Die innere Seite der Aderhaut ist mit einer schwarzen, schleimartigen Substanz***) überzogen. Sie dient dazu, die durch die Seitenwände entstehende Reflexion des Lichtes zu hindern und ist ein wesentlicher Bestandtheil des Auges.

In der Kindheit wird sie häufiger abgesondert und gibt dann der Sclerotica die bläuliche Farbe.

Nach vorn geht die Choroidea nur bis zur Verbindung der Hornhaut mit der weißen Haut und ist hier durch zartes, aber dichtes Zellgewebe, welches einen weißlichen dicken, ungefähr 1 Linie breiten Ring†), das Strahlenband, bildet, befestigt. Aus diesem entstehen die nach vorn sich erstreckenden 70 bis 90 strahlenförmigen Fortsätze,

---

*) Tunica cornea, cornea pellucida; cornée transparente.
**) Tunica choroidea vasculosa; choroïde.
***) Pigmentum nigrum.
†) Orbiculus ciliaris.

welche zusammen den Strahlenkranz, Strahlenkörper, Faltenkranz 9,9; k,k*) bilden, dessen Bestimmung wahrscheinlich ist, den Glaskörper zu halten.

4. — Die Regenbogenhaut, Iris, Augenstern g,g, deren hintere ebenfalls mit einem schwarzen Pigment überzogene Seite die Traubenhaut**) heißt, ist eine für sich bestehende runde und glatte Haut mit einer kreisrunden Oeffnung, der sogenannten Sehe***). Sie liegt zwischen der Hornhaut und der Krystallinse, der letztern näher als der erstern.

Ihr äußerer Rand, beträchtlich dicker als der die Pupille begrenzende, ist in eine Furche des Ciliarkörpers eingefalzt und durch Zellgewebe damit verbunden. Sie erscheint strahlig und ist bei nördlichen Völkern heller bei hellerer Farbe der Haare und weißerer Haut. Die Pupille zieht sich durch den Reiz des Lichtes zusammen, erweitert sich dagegen bei Abnahme des Lichtes.

5. — Die Nervenhaut, Netzhaut e,e, 4,4†) ist eine unmittelbare Fortsetzung und Ausbreitung des Sehnervs. Die Sehnerven, welche unter den Hirnnerven die dicksten sind, entspringen an der äußern und obern Fläche des Sehhügels oder des großen untern Hirn-Gangliums und an den Stirnhügeln, nehmen auch noch Markfasern vom Boden der dritten Hirnhöhle auf und treten dann auseinanderweichend durch eigene Oeffnungen in die Augenhöhlen.

---

*) Corona s. tunica ciliare, corpus ciliare; couronne ciliaire.

**) Uvea.

***) Pupilla; la pupille.

†) Retina; retine.

Auf diesem Wege findet eine Kreuzung der Nervenfasern statt, was jedoch noch problematisch ist. Die Beschaffenheit anderer dem vorliegenden Zweck nach indifferenten Theile werden hier übergangen. Bedeutungsvoller sind die drei verschiedenen, zur Function des Auges wesentlich gehörenden Flüssigkeiten, nemlich:

6. — Die wässerige Feuchtigkeit 10,h*) befindet sich zwischen der Hornhaut vor und hinter der Iris bis an die Linse.

Die Krystalllinse 11,i**) liegt hinter der wässrigen Feuchtigkeit im vordern und mittlern Theil des Auges, ist linsenförmig und auf der hintern Seite converer.

Der Glaskörper***) nimmt dengrößten hintern Theil des Augapfels ein.

Die wässerige Feuchtigkeit (6.) ist eine wasserhelle, farbenlose, durch die Iris in zwei ungleiche Abtheilungen getrennte Flüssigkeit. Sie ist vollkommen durchsichtig, sehr elastisch und gehört zu den serösen Häuten. Durch zu reichliche Absonderung, wie Absorption entsteht Weit- und Kurzsichtigkeit.

Die Krystallinse (7.) ist eine consistente Feuchtigkeit im Auge, sie ist biconver mit stärkerer Krümmung der hintern als der vordern Seite und verflacht sich mehr bei zunehmendem Alter.

Der Glaskörper (8.) nimmt den größten Theil des Auges, den mittlern und hintern, ein und ist in eine eigene zarte Haut, die Glashaut, eingeschlossen. Er ist vollkommen durchsichtig und farblos, eiweißartig consistent. Die lichtbrechende Kraft dieser Flüssigkeiten ist wenig vom Wasser verschieden, nem-

---

*) Humor aqueus; l'humeur aqueuse.
**) Lens crystallina; le crystallin.
***) Humor vitreus; humeur vitrée.

lich das Verhältniß des Brechungssinus zum Einfallssinus bei der Hornhaut = $1,_{33}$, der wässerigen Feuchtigkeit = $1,_{338}$, der Glasfeuchtigkeit = $1,_{339}$, der Linse $1,_{384}$. Nach andern Berechnungen hat man jedoch die Brechungskraft der letztern = 14:13, daher ihre absolute Brechungskraft = $1,_{438}$ gefunden.

Drittes Kapitel.

Von den Verrichtungen des Auges beim Sehen.

7. — Zu dem eigentlichen Sehen ist nicht bloß das Auge und eine genügende Stärke des Lichtes erforderlich, sondern auch, daß das eigenthümliche Licht selbstleuchtender Körper in das Auge dringe und daß die bloß erleuchteten auf die unten näher bestimmte Weise ein Bild im Auge erzeugen.

8. — Nach Keppler's Theorie, welche die Erklärung des Sehens so weit bringt (Fig. 4), als sie durch die Physik gebracht werden kann, werden die von den gesehenen Objecten ausgehenden Lichtstrahlen ABC nach den Gesetzen der Brechung in durchsichtigen Medien mit krummer Oberfläche nach ihrem Durchgange durch die durchsichtige Hornhaut in der wässerigen Feuchtigkeit nach der Axe des Auges gebrochen, durchkreuzen sich in der Linse l und erzeugen ein verkleinertes, verkehrtes Bild bac auf der Retina, indem die Brennweite nach genauen Messungen 0,6 Zoll hinter die Linse und sonach auf die Netzhaut trifft.

Auf welche Weise aber das Auffallen der zum Bilde vereinigten Lichtstrahlen auf die Retina eine Empfindung überhaupt erzeugt, demnächst aber auch in dem Sensorium das Bewußtsein des Gegenstandes außer uns bewirkt, dieses ist zwar in verschiede-

nen Hypothesen aufgestellt worden, bleibt jedoch noch so gut als unbeantwortet.

Das Auge, als optisches Werkzeug betrachtet, muß nothwendig allen den Bedingungen unterliegen, welche diesen ihre Wirkung sichern. So ist die Gefäßhaut und die innere Seite der Traubenhaut mit einem dicklichen schwarzen Pigment überzogen, gleich dem Innern der optischen Instrumente, um alle Lichtstrahlen zu verschlucken und ihre Reflexion zu verhindern, außer diejenigen, welche zu Erzeugung des Bildes auf der Retina bestimmt sind.

Ferner geben die biconvexen Linsen der optischen Werkzeuge bei Kreissegmenten keine vollkommen scharfe Bilder in ihrem Brennpuncte, sobald die Lichtstrahlen in einiger Entfernung von der Axe auf sie fallen. Dieser Umstand kann durch die (obwohl noch hypothetische) parabolische oder hyperbolische Krümmung der Linse gehoben sein; diese auch bei Seite gesetzt, hebt er sich schon von selbst dadurch, daß die Linse nach dem Rande zu an Dichtigkeit zunimmt, wie Untersuchungen gezeigt haben.

Eine zweite aus dem Bau des Auges folgende Unvollkommenheit ist die Farbenzerstreuung, oder die nicht achromatische Einrichtung des Auges, wodurch die Bilder farbige Ränder haben und undeutlich werden müßten. Sie wird dadurch beseitigt, daß sich das farbige Licht auf der Unebene der Retina eigenthümlich zu weißem mischt, um so mehr, als für die, durch die verengte Pupille in den sehr kleinen Raum um die Axe einfallenden Lichtstrahlen keine bedeutende Farbenzerstreuung statt haben kann.

9. — Die Netzhaut kann ein vollkommen deutliches Bild nur dann empfangen, wenn der Gegenstand sich in einer bestimmten Entfernung vom Auge befindet. Man nennt diejenige Entfernung der Objecte, in welcher sie die deutlichsten Bilder geben,

die Sehweite (Weite des deutlichen Sehens) und setzt sie durchschnittlich auf 8 pariser Zoll, bei einem gut gebauten gesunden Auge auf 10 Zoll.

Sie unterliegt indeß Modificationen je nach dem Grade der Helligkeit, der Empfänglichkeit des Auges für eine gegebene Lichtstärke, der Farbe des Objects und der Durchsichtigkeit des zwischenliegenden Mediums. Indessen hat die Erfahrung und Beurtheilungskraft einen entschiedenen Einfluß auf das deutliche Sehen, sowie die durch stärkere Fixirung erfolgte Ajustirung des Auges für die bestimmte Entfernung u. a. m. Wie das Auge sich der Entfernung des Sehens anpasse, ob durch die Stellenveränderung der Krystallinse, durch deren Curvenveränderung, durch Erweiterung und Verengung der Pupille, ist schwer zu entscheiden; am wahrscheinlichsten ist die Stellenveränderung der Krystallinse. Die Weit- und Kurzsichtigkeit sind abnorme Zustände des Auges.

Viertes Kapitel.

Von dem Vorgang des Sehens.

10. — Den Vorgang des Sehens in mehr specieller Ansicht können wir uns nun denken, als gehe ein Strahlenbündel von dem erleuchteten oder selbstleuchtenden Gegenstand aus, zu welchem jeder lichte Punct durch Widerstrahlen wenigstens einen Lichtstrahl spendet. Es sendet aber jeder strahlende Punct nach allen Richtungen hin Strahlen aus, und so wird auch von dem Punct **A** ein Strahlenbüschel **AMO** in die Oeffnung des Auges gelangen. Derjenige Strahl, welcher in **O** die Hornhaut durchsetzt, fällt rechtwinklich auf die Oberfläche der Krystallinse und gelangt, ohne eine Brechung zu erleiden, zu der Netzhaut in **a**. Ebenso die Strahlen **BO** und **CO**.

Die Richtung aA nennt man die optische Axe, Augenaxe; sie ist die Richtung des Auges, gleichsam die Axe des Strahlenkegels, in dessen Spitze das Auge steht.

Die andern den Lichtkegel constituirenden Strahlen AM, AN ꝛc. werden beim Durchgang durch die wässerige Feuchtigkeit gebrochen und nähern sich, indem sie gegen die Iris fortlaufen, der optischen Axe. Die von ihnen, welche dann den undurchsichtigen Theil der Iris treffen, sind für das Sehen verloren, die aber, welche die Pupille berühren, fallen auf die Krystalllinse. Ihr Durchgang durch diesen Körper, der dichter ist, als das durchlaufene Medium, ändert ihre Richtung und sammelt sie in der Glasfeuchtigkeit hinter der Krystalllinse wieder zu einem neuen umgekehrten Kegel, dessen Spitze a in der Rückwand des Auges, der Retina, liegt, wo sie das Bild des Punctes erzeugt.*)

Ein Gleiches geschieht mit den Strahlenbüscheln, die von andern Puncten, z. B. B und C, ausgehen, und da ein jeder Punct des Gegenstandes in gleicher Weise thätig ist, so wirken sie vereint zu der Bildung eines vollständigen Spiegelbildes auf der Retina, welches aber wegen der Kreuzung der Axen ein verkehrtes ist, wie der Abdruck von dem Stich auf der Kupferplatte.

Wie das verkehrte Bild der Retina sich in dem Sensorium zum umgekehrten verwandelt, daß sich rechts stellt, was im Bilde links ist und umgekehrt; warum wir einen Gegenstand, von dem doch jedes

---

*) Wenn die subjective Bildung des Auges so ist, daß die Spitze des Kegels vor die Retina fällt, oder wenn die Strahlen, die sich zur Spitze vereinigen, die Rückwand des Auges erreichen, bevor sie sich zum Punct gesammelt haben, so wird in beiden Fällen das Bild weniger scharf begrenzt, als wenn die Spitze des Strahlenkegels auf die Retina fällt.

Auge ein Bild aufnimmt, einfach, nicht doppelt sehen; wie die Seele aus dem Miniaturbildchen ziemlich richtig das Verständniß des Naturobjects, der Nähe, Ferne, des Plastischen schöpft, überlassen wir der Psychologie zu ergründen.

11. — Nimmt man um die optische Axe **AO** eine unendliche Anzahl von Kreiskegeln an, wie **bOb'**, **cOc'**... die, auf einer der Axe senkrechten Ebene ruhend, gerade und concentrisch sind (Fig. 5); so ist augenfällig, daß die Bilder der auf einander folgenden Grundebenen auf der Retina eine Folge von concentrischen Curven erzeugen werden, die um das Bild des Punctes **A**, den gemeinschaftlichen Mittelpunct, herumliegen.

Solange als der Winkel **eOe'**, den zwei gegenliegende Seiten des größten Kegels machen, nicht zu groß ist, wird die Grundebene dieses Kegels auf der Retina ihr Bild finden; wenn aber der zunehmende Winkel des Kegels in eine solche Phase tritt, daß die Lichtbüschel, deren Axen mit den gedachten Seiten des Kegels zusammenfallen, sich nicht mehr scharf auf der Retina spiegeln können, weil sie entweder die Krystalllinse nicht oder zu schräg treffen, so hört das Sehen der über dies Maß sich ausbreitenden Grundebene, z. B. **mn**, der Kegel auf, und die Mantelfläche desjenigen Kegels, dessen Grundebene dem Auge noch deutlich erkennbar ist, macht die Grenze des Raums, den man das G e s i c h t s f e l d (champ de la vision) nennt, weil man, ohne das Auge zu wenden, nur die lichtsendenden Puncte wahrnehmen kann, die innerhalb dieses Raumes liegen; und der Winkel, der von zwei gegenliegenden Seiten des Kegels eingeschlossen wird, heißt der G e s i c h t s w i n k e l, W i n k e l d e s d e u t l i c h e n S e h e n s (l'angle optique de la vision).

Man verwechsele damit nicht denjenigen Winkel, den die Axen zweier Strahlenbüschel einschließen, die, von den Enden des Objects ausgehend, sich in dem Auge kreuzen. Diesen Winkel nennt man den Sehwinkel (l'angle visuel). So ist der Winkel **BOC**, Fig. 3, der Sehwinkel in Bezug auf den Pfeil **BC** für das Auge **O**, so wie **BOC'** der Sehwinkel für die Stellung des Auges in **O'** ist; er wird durch die optische Axe halbirt.

12. — Die Größe des Gesichtwinkels oder die Ausdehnung des Gesichtfeldes ändert sich, abhängig von verschiedenen Umständen, mit dem Individuum; sie ist zuweilen selbst subjectivem Willen unterworfen. Daher dessen verschiedene Annahme bei den Physikern. Das Maximum dieses Winkels setzt man indeß 90°. Manches Auge beherrscht nur einen Winkel von 60° und darunter. Wir werden später nochmals darauf zurückkommen.

13. — Der Sehwinkel fällt im Maximum mit dem Gesichtswinkel zusammen. Größen, deren äußerste Enden mit dem Auge einen Winkel bilden, welcher den Gesichtswinkel übersteigt, können mit einem Blick nicht scharf übersehen werden. Das Minimum des Sehwinkels, wenn nemlich im Auge noch ein wirklich meßbares Bild erzeugt werden kann, darf unter den günstigsten Umständen, als mäßigem Sonnenschein, heiterer Luft, lebhafter Farbe des Gegenstands rc., nicht unter 30 Secunden sein; man setzt ihn gewöhnlich 60 Secunden.

Unter diesem Normalwinkel werden zuerst in größern Entfernungen die Formen der Körper nicht gehörig unterschieden und kleine Gegenstände verschwinden ganz, z. B. Blätter der Bäume, Reiser, Aehren und dergleichen; Baumpartien, Getraidefelder, Berge rc. verschwimmen zu Massen; Baumalleen scheinen am entlegenen Ende, wo der Brei-

tenabstand der Reihen vielleicht nur einen Sehwinkel von 40 Secunden macht, zusammenzutreffen, indem die Zerstreuungskreise die Bilder der Gegenstände vergrößern, die der Zwischenräume dagegen verkleinern. Dabei bemerke man noch, daß, genau betrachtet, nur diejenigen Objecte am deutlichsten und schärfsten gesehen werden, welche in der Augenaxe und zunächst dabei liegen.

14. — Die Oeffnung des Sehwinkels bestimmt das, was man die scheinbare Größe des Objects nennt, eine Größe die sehr verschieden von der wirklichen Größe ist. Diese ist constant, jene ändert sich mit dem Abstand des Auges. Wie der Sehwinkel einen Gegenstand umspannt, so umspannt der Winkel, der sich hinter seiner Spitze im Auge bildet, das Bild des Objects auf der Retina; beide wachsen und verkleinern sich gleichmäßig. Sind beide nur klein, so stehen die Vergrößerungen und Verkleinerungen der Winkel, so wie die Durchmesser des Bildes, in umgekehrtem Verhältniß mit dem Abstand des Objects vom Auge.

Es werde z. B. der Pfeil **AB** Fig. 3 unter einem Winkel **AOB** $= 30^{\circ}$ gesehen und erzeugte das Bild bc; derselbe Pfeil Fig. 4 werde nun unter dem doppeltgroßen Winkel **A'OB'** gesehen: so entsteht bei letzterm ein doppelt so großes Bild **b'c'**, als das erstere ist, während die Entfernung **AO'** die Hälfte von der **AO** beträgt.

Jemehr die Entfernung des Objects zunimmt, desto größer wird die Differenz zwischen scheinbarer und wirklicher Größe.

15. — Aus diesem Verhalten könnte man schließen, daß wir ungleiche Objecte unter gleichem Sehwinkel nicht anders als gleich anerkennen müßten, weil ein Maßstab fehlt, der die Täuschung vernichtet. Glücklicher Weise hat uns jedoch die fortlaufende

Erfahrung von den Kindheitsjahren her mehr als einen solchen Maßstab eingeübt, wodurch wir eine ziemlich richtige Abschätzung der verschiedenen, scheinbar gleichen Größen gelernt haben.

Namentlich ist es neben andern Vergleichungsmitteln die Abnahme der Deutlichkeit in Form und Farbe bei zunehmender Ferne, wodurch uns das unbewußte Schätzen des Objects, seiner Größe und Entfernung ziemlich natürlich geworden ist.

16. — Die Figuren 3 und 4 belehren uns, daß das Bild eines und desselben Gegenstandes auf der Retina sich mehr und mehr ausbreitet, je näher das Auge dem Gegenstand rückt. Es ist ferner gezeigt worden, daß im günstigsten Falle die Stellung des Auges in Bezug auf den Gegenstand noch ein ziemlich deutliches Bild geben kann, wenn der Winkel **B'O'C** zu 90° wächst; dann ist der Abstand des Auges gleich halb so groß als der Gegenstand, den der rechte Winkel umspannt.

Die äußern Sehstrahlen fallen dann schon ziemlich schräg auf die Retina, verlieren somit an der Deutlichkeit ihres Bildes, indem diese von der Axe Aa' ab progressiv abnimmt; und über einen Winkel von 90° hinaus ist der Eindruck durch die auffallenden Lichtstrahlen entweder zu schwach, oder verworren und verschwimmend, als daß das Sensorium ihn zu klarer Gestaltung verarbeiten könnte: so würde der Punct **C'** nicht sichtbar werden, weil der Strahl **CN** nicht die Krystalllinse trifft. Daher die Bewegung des Auges oder Kopfes, wenn es einen nicht zu fernen hohen Gegenstand, einen Baum, einen Thurm seiner ganzen Höhe nach sehen will; es ist gezwungen, die optische Axe zu verändern und einmal mehr nach oben, einmal nach unten zu richten.

17. — Der Mathematiker weiß, daß mit Abnahme des Winkels der Cosinus wächst, daß sich

demnach das Auge in größere Entfernung zurückziehen muß, wenn es einen kleinern Gesichtswinkel annehmen will, oder, was gleichviel ist, wenn es ein großes Gesichtsfeld beabsichtigt, um dem Bilde mehr Ausbreitung zu geben und doch an der vollkommenen Uebersicht des Ganzen nicht behindert zu werden.

Dies führt uns auf die Gesetze, welche die Entfernung des Auges von der Bildtafel bestimmen, auf das, was in der Perspective und Malerei allgemein durch Distanz bezeichnet wird.

Fünftes Kapitel.

Von der Distanz.

18. — Da, wie oben bemerkt, die Größe des Gesichtswinkels keine constante, und von vielerlei Einwirkungen abhängig ist, so kann auch die Distanz, weil mit ihm gehend, keine constante Größe sein.

Setzen wir die Grenzen des deutlichen Sehens innerhalb eines Winkels von 90°, so folgt für den Abstand des Auges von einem Gegenstand oder für die Distanz die halbe größte Ausdehnung dieses Gegenstands.

Unter keinen Umständen darf man die Distanz kürzer annehmen. Schon bei diesem Stande verziehen sich für viele Augen die Gegenstände an den Grenzen des Bildes in das Unnatürliche oder verwirren sich.

Jedes Bild, noch mehr jede perspectivische Darstellung, verlangt, daß sich der Betrachtende in denselben Standpunct stellt, welcher bei der Ausführung zu Grund gelegt wurde.

Aus ihm nur wird es so erscheinen, wie das Object in der Wirklichkeit, in jeder andern wird man unnatürliche Verzerrungen wahrnehmen, oder

es werden die Verhältnisse der einzelnen Theile doch nicht als die gewohnten erscheinen.

Nimmt man bei der Bearbeitung des Bildes den Winkel, der die Größe von dessen Dimensionen umspannt, kleiner als 90° an, dann werden jene Abnormitäten weniger auffallen, wenn sich das betrachtende Auge auch nicht streng in den vorgeschriebenen Standpunct und weiter abstellt. Im Allgemeinen lassen sich feste Regeln nicht angeben, man hat nur darauf zu sehen, daß bei der gewählten Distanz nicht unnatürlich verschobene Flächen entstehen, die, obschon mathematisch richtig, doch das Auge beleidigen. Bei großen Wandgemälden treten wieder andere Rücksichten auf, als bei kleinern Staffeleigemälden, da jene ohnehin nur selten aus einerlei Standpunct übersehen werden können. Raphael hat in der Schule von Athen die Distanz der Grundlinie des Gemäldes gleichgestellt, welches einen Gesichtswinkel von 53° bis 54° gibt.

Einige Maler schreiben nach diesem Muster vor, die Distanz der größten Ausdehnung des Bildes gleich zu setzen; andere setzen sie zwei bis $2\frac{1}{2}$ Mal der größten Dimension. Zu der ersten Annahme gehört ein Winkel von 28°, zu der zweiten ein Winkel von 22° bis 23°. Wieder andere verlangen zur Distanz die dreimalige größte Seite des Bildes, welches einem Winkel von 19° entspricht; welche Weite jedoch, zumal bei großen Bildern, zu groß sein dürfte. Man würde in dieser Entfernung die Gegenstände oft nicht deutlich erkennen und dann gezwungen sein, näher zu treten, als es das perspectivische Gesetz vorschreibt.

Mit Berücksichtigung der verschieden gebildeten Augen läßt sich durchschnittlich als eine gute Distanz annehmen, wenn sie zweimal so groß als die längste Seite des Gemäldes ist. Auch die

Größe der Diagonale gibt eine gute Weite für den Stand des Auges.

Bei einer weiten Distanz entsteht noch der Nachtheil, daß die Gegenstände auf der Horizontalebene zu nahe an einander rücken; bei einer geringern trennen sie sich besser, breiten sich mehr aus und entwickeln sich vortheilhafter. Bei Deckengemälden, Theaterdecorationen und dergl. ist die Distanz von selbst durch den unverrückbaren Stand des Anschauenden festgestellt. Die Fälle, wo eine fingirte Distanz zu entschuldigen sein möchte, müssen als abnorm bezeichnet werden. Ist die Natur des Gemäldes so, daß das Detail sehr zart behandelt werden mußte, oder daß kleine Theile gut unterschieden werden sollen, so verlangen diese eine größere Annäherung des Auges, also eine kürzere Distanz.

19. — Will man nun in einem Bilde einen bestimmten Theil einer Handlung oder einer Landschaft einrahmen, so daß z. B. die Gegenstände **D**, **E** noch ihren Platz finden sollen (Fig. 6), so muß nothwendig die Distanz sich darnach richten. Man bestimme sich nach §. 18 über den Gesichtswinkel und setze die Dimension der Bildebene fest, welche gleich **MN** sein möge. Nimmt man nun den Gesichtswinkel **MON** zu 90° an, so ist **OO′** die beziehliche Distanz. Sie ergibt sich durch Construction, wenn man aus der Mitte von **O′** einen Halbkreis und aus **O′** einen Radius zieht. Hätte man die Distanz in **G** genommen, so würde der Winkel **EGD** größer als 90° geworden, also die Gegenstände **D** und **E** außerhalb des größten Gesichtfeldes gefallen sein.

Man sieht, daß die Distanz **O** nie *in den* Halbkreis fallen darf, dessen Durchmesser die größte Seite des Bildes ist; wohl aber kann man sie ziemlich beliebig außerhalb des Kreises annehmen.

Sechstes Kapitel.

Entstehung eines perspectivischen Bildes.

20. — Alle Regeln der Perspective beruhen auf dem Satze, daß das Licht in einerlei Medium nach geraden Linien sich bewegt.

Denken wir uns die beiden Projectionsebenen, die horizontale und verticale der Projectionslehre; auf der horizontalen eine schräge Pyramide mit ihrer Grundebene stehend, und diese Pyramide von der Verticalebene geschnitten, so ist die Figur des Durchschnitts das perspectivische Bild der Grundebene auf der senkrechten Tafel, wenn man diese als Zeichnenebene und das Auge in der Spitze der Pyramide annimmt.

Aus diesem Satze würden sich alle perspectivischen Regeln nach § 70 und folgenden der orthogonalen Projectionslehre ableiten lassen; es möge jedoch die Andeutung genügen, daß die Vorstellungsweise, zu der wir übergehen wollen, in naher Beziehung zu jenem Satze steht. Bequemer für die Praxis und allgemeiner angenommen, ist die Theorie, welche man von einer durchsichtigen Tafel ableitet und deßhalb auch die Glastafeltheorie nennt.

Sie ist der Lehre von den Projectionen überhaupt ein integrirender Theil und es finden die Elementarsätze der beschreibenden Geometrie volle Anwendung, nur unter der Modification, daß die zweiten projicirenden Linien aufhören, normal der Projectionsebene zu stehen, sondern nach einen Punct convergiren, welcher von dem Stande des betrachtenden Auges abhängt.

21. — Es sei YX eine horizontale Ebene*); auf ihr stehe eine durchsichtige Tafel (Glastafel) bcde (bei welcher, wie sich versteht, von dem Brechungsvermögen abzusehen ist); hinter der Tafel liege auf der horizontalen Ebene eine Figur nmkl und vor ihr in O stehe das Auge des Betrachtenden.

Jeder Punct der Figur mnkl sendet Strahlen in divergirender Richtung aus, unter denen gewiß einer das Auge trifft, wenn nicht ein Hinderniß dazwischen tritt. Solche Strahlen seien denn auch die von den Eckpuncten ausgehenden no, mo, ko und lo. Diese Strahlen durchdringen die Glastafel in m'n'k'l' und würden die Eckpuncte des perspectivischen Bildes geben, wenn sie Spuren ihres Durchganges zurücklassen könnten. Aus der Vorstellung, als betrachte man ein Object durch eine durchsichtige Tafel, ist die Benennung „Perspective" entstanden.*)

Man braucht gewöhnlich diese Benennung nur für Centralprojectionen, obgleich die orthogonalen, isometrischen u. a. Projectionen zur Perspective zu rechnen sind. Die Perspective wird eingetheilt in Linear- und Luftperspective; hier beschäftigt uns die Linearperspective ausschließlich. Die Luftperspective macht eine besondere Lehre aus und enthält die Erscheinungen der Farben mit Beziehung auf das Medium der Atmosphäre, die Beleuchtung und Beschattung der Gegenstände ꝛc. Sie ist einer

---

*) Wir können vorgreifend unter dieser Ebene den natürlichen Boden denken und nehmen sie zu Begründung der elementaren Sätze stets wagerecht, eine andere aber senkrecht an. Es wird dadurch theils an Einfachheit gewonnen, theils läßt sich das Verhalten von schrägen Ebenen immer auf horizontale zurückführe.

**) Von perspicere, durchsehen, hindurchsehen.

besondern Schrift vorbehalten, die als zweiter Theil des vorliegenden Werks betrachtet werden kann.

22. — Es geht schon aus der obigen Erklärung hervor, daß das Bild der Glastafel sich mit der Stellung des Auges, je nach der Höhe, Entfernung, nach rechts oder links verändern muß; denn mit dem Auge verändert sich die Spitze, die Form, mithin auch die Durchschnittsfigur der Strahlenpyramide. Es sind dies Factoren, von denen die Gestaltung des perspectivischen Bildes abhängt, die daher in nähere Betrachtung gezogen werden müssen.

Siebentes Kapitel.

Von dem Horizont und andern bei perspectivischen Constructionen vorkommenden Linien und Puncten.

23. — Die Grenzen der Höhe, in welcher das Auge gedacht werden kann, liegen zwischen der Grund- (Horizontal-) ebene und einer ungemessenen Höhe. Läge das Auge in der Horizontalebene selbst, dann würde jede Figur auf ihr als Linie erscheinen; liegt es in ungemessener hypothetischer Höhe, so hätten wir die Stellung, welche bei den orthographischen Projectionen angenommen wurde, wenn wir die Dimension „Höhe" allgemeiner in „Ferne" verkehren. Zwischen diesen Grenzen liegt ein weites Feld, und es könnte scheinen, als ob bei Annahme der Höhe die Willkür freien Spielraum hätte. Dem ist jedoch nicht so! und wie die Distanz auf ziemlich enge Grenzen beschränkt werden mußte, so auch die Höhe des Auges; wie jene ein großes Gewicht bei perspectivischen Operationen hat, so muß eine gleiche Wichtigkeit dem Höhenstande des Auges zuerkannt werden. Obgleich feste Bestimmungen

desselben nicht vorliegen, so lassen sich doch einige allgemeine Regeln aufstellen.

24. — Die Gesetze § 18, welche den Gesichtswinkel ordnen, sind die ersten, denen man sich auch in Bezug auf die Höhe des Auges unterwerfen muß; es ist ihrer bereits dort gedacht, indeß haben sie nur geringen Einfluß auf die höhere oder niedere Stellung des Auges, die von andern Umständen bedingt wird. Je höher das Auge steht, desto mehr Fläche stellt sich ihm der Tiefe nach dar. Die obern Flächen der Gegenstände werden im Bilde räumlicher; in Landschaften wird an Boden gewonnen, an Luft verloren; die verschiedenen Gründe dehnen sich mehr aus, gestatten daher eine umfangreichere Besetzung mit Naturleben, sie treten höher übereinander hervor, decken sich weniger und die Gegenstände auf ihnen sondern sich mehr, können daher besser übersehen werden.

Je niedriger sich das Auge stellt, desto gedrückter, zusammengepreßter werden Object, wie Bild erscheinen; manche der Gegenstände verlieren ihre obern Flächen wohl ganz; die Fernen rücken näher zusammen; Terrassen decken sich mehr, trennen sich weniger; man gewinnt an Himmel, verliert an festem Boden.

Die anzuordnende Höhe des Standpunctes ist sonach von der Eigenthümlichkeit des Objects und dessen beabsichtigter Darstellung abhängig. Man muß sie höher nehmen, wenn man die obern Flächen mehr herausheben will, wenn Naturgegenstände, Gruppen bei niedrigerm Stande zu sehr ineinander rücken, wenn ein ungefälliges Verhältniß zwischen Himmel und Terrain entstehen würde. Die natürlichste Höhe ist aber die, welche dem Auge des Beobachters wirklich zukommt, in freier Ebene die Manneshöhe, bei Gebäuden in der Höhe des zwei-

ten Stocks 2c.; man muß sie nur verlassen, wenn besondere Umstände es bedingen. Der Beobachter eines Bildes wird sie stets zuerst in dieser Linie suchen.

25. — Die Höhe, welche das Auge einnimmt, ist auch die Höhe des scheinbaren Horizonts, der sich indeß nur rein in einer flachen Gegend, am reinsten auf dem Meer als Scheidelinie zwischen Wasser und Himmel herausstellt. Er ist die äußerste Grenze der horizontalen Ebene und steigt und fällt mit dem Auge. Legen wir durch das Auge eine horizontale unbegrenzte Ebene, so schneidet diese die Bildtafel in einer Linie, welche der perspectivische Horizont der Tafel, kurz der Horizont (horizon du tableau), Grenzlinie*) heißt, die Ferne aber in der scheinbaren Linie, wo Himmel und Erde sich zu berühren scheinen.**)

Der Horizont DE ist also immer parallel der Grundlinie und liegt mit dem Auge in einerlei Abstand von der Horizontal- oder Grundebene.

Finden sich in dem perspectivisch darzustellenden Gegenstand geneigte Ebenen, so unterscheidet man den perspectivischen Horizont dieser Ebenen von dem der übrigen Zeichnung und nennt ihn vorzugsweise Grenzlinie. Sie ist nichts als der um den Augenpunct gedrehte, erhöhete oder vertiefte Horizont, welcher parallel der Fluchtlinie der geneigten Ebene liegt, oder doch dieser eigens zugehört.

---

*) Die Benennung „Grenzlinie" braucht man mehr bei Ebenen welche gegen die Horizontalebene eine geneigte Lage haben; sie fällt dann mit dem Horizont nicht zusammen.

**) Obgleich der Horizont in der Wirklichkeit ein Bogen der Erdkrümmung ist, so stellen wir ihn doch als eine Gerade dar. Der Theil der Krümmung innerhalb des Gesichtwinkels ist zu unbedeutend, als daß wir nicht den wahren Horizont mit dem scheinbaren vertauschen könnten.

26. — Bei dem Vortrag der Perspective sind verschiedene Kunstausdrücke außer den schon erklärten eingeführt; die Schriftsteller haben sich jedoch über allgemein bestimmte nicht geeinigt. Es soll die Aufgabe dieses § sein, sie aufzustellen und ihre Bedeutung zu erläutern:

a) Die Linien, welche, von Puncten des Objects ausstrahlend, nach dem Auge O gedacht werden können, wie nO, mO, kO.... heißen Gesichts- Seh- auch Lichtstrahlen (rayons visuels). Später wird zuweilen in engerer Beziehung die Benennung „Theillinien" gebraucht werden.

Sie bilden vereint eine Strahlenpyramide, deren Spitze im Auge, deren Grundfläche nmkl in der Horizontalfläche, der Grundebene, Objectivebene, geometrischen Ebene (terrain) XY liegt, und von der durchsichtigen Tafel in einer Figur n'm'k'l' geschnitten wird, welche das Bild, perspectivisches Bild, perspectivische Projection heißt.

b) Flucht bezeichnet die Richtung aller Ebenen, die nicht parallel mit der Bildebene laufen. Die diese Ebenen begrenzenden (horizontalen) Linien heißen Fluchtlinien. Fluchtpunct wird der Punct genannt, nach welchem alle Fluchtlinien gerichtet sind. Es kann deren in einer Zeichnung mehrere geben, je nach der verschiedenen Neigung der darzustellenden Ebenen. Flucht- und Accidentalpuncte stehen in naher Beziehung, gelten oft auch als Synonyme.

c) Die durchsichtige Tafel bcfg, welche das Bild aufzunehmen bestimmt ist, nennt man Bildebene, Malertafel, kurz Tafel (tableau). Sie schneidet die Horizontalebene in einer Linie, der Grundlinie, Fundamental-, Erd-

linie (ligne de terre) und wird senkrecht auf dieser Ebene vorausgesetzt.

d) Der Punct O, in welchem sich das Auge befindet, heißt der Gesichtspunct, das Auge (point de vue); zu unterscheiden von dem Punct A auf der Bildebene, welchem das Auge normal gegenüberliegt und die Projection des Auges in dem Horizont ist. Der Punct A führt die Benennungen Augenpunct, Hauptpunct, Principalpunct, Centralpunct, (point principal, p. figuratif) und wird mit dem Auge durch die Augenaxe, optische Axe verbunden. Das Stück dieser unendlichen Linie zwischen dem Auge und der Tafel ist die Distanz, Augenweite. Der Punct O', wo eine Normale aus dem Auge die Horizontalebene trifft, heißt der Fuß des Auges. Die Projection dieser Normale auf der Bildebene nennt man in engerm Sinn die Verticale. Eine unbegrenzte Ebene, durch die Augenaxe und Verticale gelegt, heißt insbesonders Verticalebene; sie schneidet die beiden Projectionsebenen in Coordinaten, die mit OA und OO' ein Rechteck bilden; daher ist auch OO' gleich Aa'.

27. — Die natürlichste Stellung des Auges der Breite nach ist zwar die Mitte der Tafel; selten ist aber diese Stellung für das Bild die vortheilhafteste und muß durch den Gegenstand bedingt bald mehr, bald weniger aus der Mitte genommen werden. In jeder Art von Zeichnung oder Malerei gibt es in der Regel einen Hauptgegenstand, der eigends bestimmt ist, die Aufmerksamkeit des Zuschauers auf sich zu ziehen. Auf diesen soll der Augenpunct sich richten, ihm gemäß seine Stelle auf dem Horizont einnehmen. Das Auge, so wie der Horizont, darf für dasselbe Bild seine Lage nicht ändern.

28. — Nach dem § 21 gegebenen Begriff von der Glastafelperspective liegt also das Bild P′ eines jeden Punctes, welcher der Grundebene angehört, in dem Durchgang des Gesichtstrahls durch die Bildebene. Diesen Durchgang bestimmen zu können, (Fig. 8) sind nach (§ 7) und [§ 50]*) die Coordinaten **PP⁰** und **P¹P⁰** zu Hülfe zu nehmen. Liegt der Punct **P″** im Raum, dann wird noch die Projicirende **PP″** oder der Fußpunct des Punctes **P″** nöthig.

Da jedoch die Coordinate **PP⁰** nicht nothwendig normal der Are **G⁰**, öfter vielmehr gegen sie geneigt ist, so bedürfen wir noch der Horizontalprojection **O′P′** des Gesichtstrahles **OP**, in welcher diese Ordinate liegt; sie ergibt sich leicht, da die Höhe **OO′** des Auges und dessen Fuß stets gegebene Größen sind. Man betrachte diese Projection als den ersten Schnitt einer normalen Ebene, welche durch den Punct **P**, das Auge und dessen Fuß geht, den Punct **P⁰** aufnimmt und das Bild **P¹** (oder **P³**) mit der Bildebene gemein hat. Es wird dieses Bild des Punctes also in den Durchschnitt der Ordinate **P⁰P¹** mit der Gesichtslinie **OP** (oder **OP³**) fallen.

29. — Da bekanntlich zwei Puncte eine Richtung und, wenn es Endpuncte sind, eine Linie bestimmen, so wird auch das Bild einer Linie mittelst der Durchgangspuncte der Gesichtslinien nach den Endpuncten der Linie auf der Tafel bestimmt. Das Bild der Linie **Pp** ist daher in **P′p′** durch zweifache Anwendung des vorigen § gefunden.

30. — Eine Linie kann zur Bildebene folgende Lagen haben:

*) Die Bezeichnung (§) weis't stets auf den § der beschreibenden Geometrie, die [§.] auf den § der allgemeinen Projectionslehre, und ohne Klammer gilt es dem § der 3. Abtheilung.

a) sie kann mit derselben parallel laufen,
b) dieselbe oder die Grundlinie rechtwinklich schneiden,
c) oder die Bildebene und Grundlinie schräg schneiden.

Wir wollen diese Fälle näher betrachten.

ad a. Liegt die Linie ab der Bildebene parallel, so ist sie auch ihrem Bilde parallel, denn es bilden sich dann ähnliche Dreiecke. Daraus folgt, daß alle Bilder von Linien, die im Raum unter sich und mit der Tafel parallel sind, ebenfalls unter sich parallel sind.

ad b. Die Bilder von Linien, welche auf der Horizontalebene liegend die Grundlinie senkrecht schneiden, convergiren auf der Bildebene, d. i. ihre Richtungen laufen in einem Puncte zusammen, welcher auf dem Horizont liegt und der Augenpunct ist. Ebenso die Bilder derjenigen Linien, die nicht in der Horizontalebene liegen, sondern geneigt gegen diese, jedoch senkrecht der Grundlinie sind. Denn sie liegen mit ihrer Horizontalprojection in einer der Tafel senkrechten Ebene. Es müssen sonach auch alle Linien im Raum, welche mit jenen eine parallele Lage haben, sich im Bilde in dem Augenpunct vereinigen.

ad c. Schneidet eine Linie auf der Horizontalebene die Grundlinie schräg, so kann sie auch im Bilde nur geneigt gegen die Grundlinie oder Verticale liegen, sie kann aber auch nicht ihre Richtung nach dem Augenpuncte haben, weil sie sonst parallel den Linien wäre, welche normal der Grundlinie liegen. Sie nimmt ihre Richtung nach einem andern Punct des Horizonts, in welchem die Bilder der mit ihr parallelen Linien ebenfalls convergiren. Diesem Punct hat man die Benennung „Accidentalpunct, Incidenzpunct, zufälligem Punct" (point de fuite, ou point évanouis-

sant*)) gegeben. Besser nennt man ihn Verschwindungspunct. Für Linien, die normal der Grundlinie sind, ist der Augenpunct A Verschwindungspunct.

In diesen Puncten treffen Linien zusammen, wenn man sie unendlich verlängert annimmt.

31. — Zur Ueberzeugung, daß Linien, die auf der Horizontalebene normal der Grundlinie liegen, in dem Augenpunct zusammentreffen, nehme man ab als eine solche Linie, das Auge in O befindlich, also OA als Augenaxe und mn als Horizont an. Die Gesichtsstrahlen nach beliebigen Puncten der gegebenen Linie sind Oa, Oc, Od....

Diese Strahlen bilden in O Winkel mit der Augenaxe, die immer kleiner werden, je weiter sich die angenommenen Puncte auf ab von dem Anfang a entfernen. Sie müssen zuletzt unendlich klein werden, d. i. der bewegliche Schenkel muß mit der Augenaxe zusammenfallen. Ein weiteres Abnehmen ist nicht denkbar. In diesem Moment der Bewegung geht aber der Schenkel durch einen Punct, der in unendlicher Ferne von a liegt.

Die ersten Projectionen der Gesichtslinien sind O'a, O'c, O'd... Es nehmen sonach die Winkel an O' eben so ab, bis sie als unendlich klein in die Linie O'x', die Projection von Ox, übergehen. Diese Projectionen schneiden die Grundlinie G^0 in a, c^0, d^0, e^0, A^0.

In a muß nothwendig der Anfang des Bildes mit dem der gegebenen Linie zusammentreffen; das

---

*) In Fällen, wo ein hypothetischer Horizont angenommen wird, der zum Unterschied Grenzlinie heißt, auf welchem dann die Stellvertreter der genannten Puncte fallen, unterscheiden die französischen Schriftsteller points de fuite aériens und terrestres, je nachdem die Puncte über oder unter den eigentlichen Horizont fallen.

Bild der übrigen Puncte c,d,e.... liegt aber nach § 25 in dem Durchschnitt der Ordinaten aus c^o, d^o, e^o.... mit den Gesichtslinien, also in c',d',e'....

Da nun Ox die letztmögliche Gesichtslinie ist (wo ab dann unendlich groß ist), ihre Projection O'x' die Grundlinie in A^o schneidet, so kann auch nur eine unendliche Ferne auf der Linie **ab** in dem Durchschnitt A der Ordinate aus A^o mit der Augenaxe liegen, und so gilt dies für jede andere Linie, die mit **ab** eine parallele Lage hat, sie mag sich auf der Horizontalebene oder sonst im Raum befinden.

32. — Der Uebersicht wegen stellen wir die aus dem Obigen abgeleiteten Hauptsätze im Folgenden zusammen:

1. **Hauptsatz.** Das Bild einer Geraden ist ebenfalls eine Gerade; sie ist ein Punct, wenn die Linie in ihrer Verlängerung durch das Auge gehen würde.

2. **Hauptsatz.** Die Bilder aller Geraden auf der Grundebene, und aller mit ihnen im Raum parallelen Linien, die normal der Grundlinie stehen, haben ihren Convergenzpunct (Verschwindungspunct) in dem Augenpunct und können den Horizont in keinem andern Punct treffen.

3. **Hauptsatz.** Die Bilder aller Parallellinien der Grundebene und im Raum haben **einen** Verschwindungspunct, der in dem Horizont liegt.*)

*) Dieser Satz ist auch gültig für Linien, die parallel der Grundlinie liegen, nur ist deren Verschwindungspunct in unendlicher Entfernung zu suchen.

4. **Hauptsatz.** Jede Linie in der Grundebene und im Raum, welche mit der Grundlinie parallel ist, erzeugt auch ein mit der Grundlinie paralleles Bild. Daher sind die Bilder solcher Parallelen auch Parallelen unter sich.

5. **Hauptsatz.** Das Bild einer jeden mit der Verticale parallelen Linie ist parallel der Verticale.

6. **Hauptsatz.** Eine gegen die Grundlinie geneigte Linie in der Grundebene kann im Bild unter keinen Umständen in dem Augenpunct convergiren; sie trifft auf der Bildebene mit allen ihren Parallelen in einem Vertiefungspunct (Verschwindungspunct) des Horizonts zusammen.

7. **Hauptsatz.** Das Bild eines Winkels ist selbst ein Winkel; erscheint jedoch als Linie, wenn seine Ebene das Auge in sich aufnimmt.

33. — Diese Sätze würden schon befähigen, verschiedene perspectivische Aufgaben zu lösen, wenn wir die Beziehungen im Raume auf die Zeichnenebene übertragen könnten. Hierzu werden jedoch noch einige Vorbereitungen nöthig, worauf uns folgende Betrachtungen führen sollen.

Die Wichtigkeit der Stellung und des Abstandes des Auges von der Bildebene veranlaßt vor Allem stellvertretende Puncte auf letzterer aufzusuchen, (Fig. 10).

Denken wir den Theil OA der Augenaxe, welcher der Abstand des Auges im Raum (die Distanz) ist, um A gedreht, bis die Linie in die Bildebene fällt, so kommt der Gesichtspunct O in D oder D' zu liegen, wodurch OD = OD', gleich der Distanz, wird. Diese Puncte nennt man Distanzpuncte, Theilpuncte; sie treten in die Stelle des Gesichtspunctes und die von ihnen ausgehenden Linien, Theillinien, versehen die Function der Gesichtslinien auf der Bildebene; sie schneiden auf den in dem Augenpunct auslaufenden Augenlinien die betreffende Länge ab.

Dreht man die Linie OA in der Verticalebene um A, so daß der Gesichtspunct O vielleicht in D'' oder D''' fällt (Fig. 11), so heißt dieser Punct der Hülfspunct der Tafel.

Da nach § 32 die Bilder normaler Linien, wie ab, nach dem Augenpunct laufen und mit dem Durchschnitt der Gesichtslinie hinsichtlich ihre Länge bestimmt werden, so muß die Möglichkeit dieses Durchschnitts auf der Zeichnenebene dadurch herbeigeführt werden, daß man ab um a dreht, bis sie in die Grundlinie oder deren Verlängerung, also b in $b_{,}$ fällt, wodurch der Punct b in $b_{,}$ zu liegen kommt. Durch $b_{,}$ wird die Richtung der Theillinie $Db_{,}$, der Durchschnitt b', das perspectivische Bild des Punctes b und das der Linie ab, dessen anderer Endpunct a ist, gefunden.

Zweiter Abschnitt.

Perspectivische Constructionen.

Erstes Kapitel.

Das Zeichnen perspectivischer Puncte.

34. — **Aufgabe.** Soll ein Punct (b) der Horizontalebene perspectivisch verzeichnet werden, so stelle man sich nach Fig. 11 vor, als sei die Grundebene in die Ebene des Bildes heruntergeklappt, der Höhenstand des Auges geometrisch von der Grundlinie G^0 in A^0A und die Distanz von dem Augenpunct A nach D und D' getragen.

Man ziehe die rechtwinkliche Ordinate **ba**, trage sie auf die Grundlinie in $ab_{,,}$ ziehe die Augenlinie aA und schneide sie durch die Theillinie $Db_{,}$. Der Durchschnitt b' ist das perspectivische Bild des Punctes b.

Dasselbe Resultat wird erhalten, wenn man ab in $ab_{,,}$ trägt und als Distanz den Punct D' benutzt.

35. — Zuweilen ist folgende Construction bequemer, wenn auf der Zeichnenebene über dem Horizont Raum genug vorhanden.

Die Aufgabe ist dieselbe; es soll nemlich der Punct b auf der Grundebene perspectivisch gefunden werden (Fig. 12), wenn A der Augenpunct A^0D'' die Verticale und G^0 die Grundlinie ist. Man ziehe **ba** beliebig*), trage in AD'' die gegebene

*) Soll die Linie ab der Grundebene gefunden werden, dann ist diese Richtung eine bestimmte, nemlich die der Linie.

Distanz und ziehe D''c parallel ab. Die Verbindungslinien ac und D''b durchschneiden sich dann in dem Bilde b' des Punctes b.

Man wird sich leicht von der Uebereinstimmung überzeugen, wenn man in derselben Figur die Construction § 31 anwendet.

Noch bequemer für den Fall, daß die Distanzen D und D' nicht auf dem Horizont und auch nicht auf der Verticale über dem Horizont aufgetragen werden können (Fig. 13), ist folgende Auflösung derselben Aufgabe.

Es sei b der gegebene Punct, A der Augenpunct, D'' der Hülfspunct, also AD'' gleich der Distanz. Man ziehe bb, normal der Grundlinie, trage die Ordinate ab in ab, und verbinde aA und b,D''. Der Durchschnitt b' ist das gesuchte perspectivische Bild des Punctes b.

36. — **Aufgabe.** Einen Punct in Perspective zu legen, der auf einer andern Ebene als der Grundebene liegt, die jedoch mit letzterer parallel ist (Fig. 14).

Es sei GK der Schnitt der parallelen Ebene mit der des Bildes, der gegebene Punct sei P. Zieht man die Ordinate Pc, so wird nach dem zweiten Hauptsatz diese Linie ihren Verschwindungspunct in A, dem Augenpuncte, haben, und das perspectivische Bild des Punctes auf der Augenlinie Ac liegen. Denkt man die Ebene GK niedergerückt, daß deren Schnitt in die Grundlinie TR fällt und dann in die Bildebene niedergelegt, wodurch der Punct P in P, fällt, so hat man die Ordinate P,c, zu ziehen, deren Länge nach c,b, zu tragen, die Puncte c, und b,, welche sich auf der Ebene GK nicht unmittelbar bestimmen ließen, auf den Schnitt GK nach b und c zu projiciren und die Augenlinie Ac und die Theillinie bD zu ziehen, wodurch der perspectivische Punct p, das Bild von P bestimmt ist.

Man sieht hieraus, daß jeder Schnitt einer mit der Grundebene parallelen Ebene die Stelle der Grundlinie vertritt und mit ihm wie mit letzterer operirt werden kann. Kennt man von einem gegebenen Punct P den Abstand der Ordinate (die Abscisse) $A^oc' = A'c$ von der Verticale und den Abstand des Punctes von der Bildebene P'c' in geometrischen Maßen, so bedarf man des Grundrisses nicht, um die perspectivische Construction auszuführen. Man trägt diese beiden Maße in A^oc' A^ob' oder in $A'c$, $A'b$ unmittelbar und zieht die Augen- und Theillinien.

37. — Ist irgend ein Punct P im Raum perspectivisch zu bestimmen, so ist einleuchtend, daß dieser Fall durch § 36 gelös't ist, und es nur des Schnittes GK der parallelen Ebene bedarf, in welcher der Punct liegt. Dieser ist leicht zu finden, wenn man die Höhe von P über der Grundebene kennt und diese in A^oA' trägt. Man könnte diese Aufgabe selbst auf Fälle beziehen, wo der gegebene Punct auf geneigter oder senkrechter, der Bildebene nicht paralleler Ebene liegt; zu Lösung solcher Fälle verweisen wir jedoch auf spätere Ausführungen.

Zweites Kapitel.

Perspectivische Zeichnung von Linien und Winkeln.

38. — Da eine Linie durch ihre Endpuncte bestimmt ist, so muß sie auch auf der Bildebene durch die Bilder dieser Endpuncte bestimmt sein. Man hat also nur im Allgemeinen die Endpuncte

einzeln zu projiciren, um das perspectivische Bild der Linie zu erhalten. Bei den vielen denkbaren Lagen einer Linie im Raum löſ't sich diese allgemeine Aufgabe jedoch in specielle Fälle auf, welche zuweilen besondere Kunstgriffe erfordern; sie sind in den folgenden Aufgaben möglichst erschöpft.

39. — **Aufgabe.** Das Bild einer Linie zu finden, die normal der Grundlinie auf der Grundebene liegt.

Nach Hauptsatz 2 geht die Richtung der Linie im Bilde in dem Augenpunct aus; läßt sich daher noch ein Punct der Richtung auf der Bildebene bestimmen, so ist auch die Richtung der perspectivischen Senkrechten gefunden.

Es sei ab die in horizontaler Projection (im Grundriß) gegebenen Linie, deren Maß die geometrische Verjüngung ist (Fig. 15).

Verlängern wir sie bis zur Grundlinie G^o, so ist a^o der Punct, welcher die Richtung a^oA des Bildes feststellt; und es bleibt noch übrig, die Puncte a und b auf dieser Richtung perspectivisch zu ermitteln, wozu § 34 die Anleitung gibt.

Man trägt nemlich die Ordinaten a^oa in a^oa, und a^ob in a^ob, und zieht aus a,, b, die Theillinien nach dem Distanzpunct D. Diese schneiden auf der Augenlinie a^oA die Größe der perspectivisch Senkrechten a'b' ab, welche das Bild der gegebenen ab ist. Mit dem Distanzpunct der andern Seite wäre ein Resultat erlangt worden, welches a'b' vollkommen deckt; man benutzt jedoch womöglich stets denjenigen Distanzpunct, wobei die Schnittlinien sich am wenigsten spitz kreuzen, weil die Puncte sich dann am schärfsten geben.

Alle Linien, wie a^2b^2, a^3b^3, welche sich nach A richten, sind perspectivisch normal und parallel unter sich; diejenigen Theile derselben, die zwischen

denselben Theillinien liegen, sind aber auch perspectivisch gleich*).

40. — **Aufgabe.** Die Linie ab liegt auf der Grundebene parallel der Bildebene.

Das Bild der Linie ist dann nach Hauptsatz 4 der Grundlinie parallel und liegt zwischen den Augenlinien o^0A und b^0A, weil diese, nach Hauptsatz 2, die perspectivischen Richtungen der Ordinaten aa^0 und bb^0 sind (Fig. 16).

Man ziehe also diese Ordinaten und die Augenlinien a^0A und b^0A, trage a^0a nach $a^0a_,$, ziehe die Theillinie $a_,D$, wodurch der Punct a in dem Bild a' gefunden wird. Eine Parallele a'b' mit der Grundlinie schneidet den Punct b' und ist das Bild der gegebenen Linie ab.

Alle mit a'b' parallelen Linien, wie a^2b^2, a^3b^3 rc., die zwischen denselben Augenlinien liegen, sind $\overset{=}{p}$.

41. — **Aufgabe.** Das Bild einer Linie ab auf der Grundebene (Fig. 17), welche geneigt gegen die Grundlinie ist, zu projiciren.

Nach Hauptsatz 6 geht die Richtung einer solchen Linie auf der Bildebene nach einem Punct des Horizonts, dem Verschwindungspunct für diese Neigung.

Diesen zu finden, verlängere man die gegebene Linie nach G° (Fig. 17), so ist a_0 deren Durchgangspunct durch die Bildebene und ein Punct ihrer Richtung. Man ziehe die Ordinaten aa^0, bb^0 und bestimme nach § 34 den Punct a' des Bildes von a. Dieser ist ein zweiter Punct der Richtung, auf

*) Für die Folge werden wir zur Abkürzung für „perspectivisch gleich" das Zeichen $\overset{=}{p}$ und für „perspectivisch parallel" das Zeichen $\overset{\ddagger}{p}$ brauchen.

welcher das Bild der gegebenen Linie durch die Augenlinien in a'b' abgeschnitten wird; und deren Verlängerung schneidet auf dem Horizont in D'' den Verschwindungspunct für alle Linien os, pt, qu, rv, welche parallel ab, so daß auch im Bild die Richtungen mn, a^2b^2, os', pt'... $\underset{p}{\mp}$ unter sich und mit a'b' sind; überdies ist a^2b^2 auch $\overset{=}{p}$ der Linie a'b' und ab. Dabei kann, wie α^4 und a^5 zeigt, das Bild des Winkels in einen rechten oder stumpfen übergehen, ohne daß dadurch die perspectivische Gleichheit der Winkel α gestört wird.*)

42. — **Aufgabe.** An eine gegebene Linie ab der Bildebene (Fig. 18), welche der Grundlinie parallel, einen Winkel α perspectivisch zu zeichnen.

Der eine Schenkel hat nach der Voraussetzung eine parallele Lage gegen die Grundlinie, bleibt daher auch in andern Lagen des Winkels im Bilde, wie bei q,d,e... parallel der Grundlinie; der andere Schenkel hat nach Hauptsatz 6 einen Verschwindungspunct D'', der Winkel mag jede beliebige Stelle der Bildebene einnehmen.

Gehen wir zurück zur vorigen Aufgabe und es sei der Winkel b^0a_0b der gegebene Winkel α in der Grundebene, so hat die Aufgabe gelehrt, die Abweichung des andern Schenkels $a_{,,}b$ und dessen Verschwindungspunct auf der Tafel zu finden. Wenden wir dies in Fig. 18 an zur Bestimmung von D'',

---

*) Man wird bemerken, daß diese perspectivischen Constructionen stets ein umgekehrtes Bild geben, daß z. B. der Punct b, welcher dem Beobachter auf der Grundebene zunächst liegt, auf der Bildebene gegen a zurückweicht. Will man dieses beseitigen, so muß man den Grundriß in verkehrter Lage unter die Grundlinie legen, so daß b in a zu liegen kommt.

sei es von der Grundlinie G^0 ab oder von dem Bild ab einer weiter hinter der Tafel gelegenen horizontalen Ebene, welche wir dann als Grundlinie annehmen: so sind alle Convergenten, die in D'' zusammentreffen, die zweiten Schenkel von Winkeln, deren erste Schenkel Parallelen der Grundlinie sind; und alle diese Winkel, wie α^1, α^2, α^3, α^4 sind Bilder des gegebenen Winkels α und $\overset{=}{p}\,\alpha$, denn deren Schenkel sind $\overset{+}{p}$ unter sich.

43. — Wäre α gleich 57^0, dann wäre auch D'' der Verschwindungspunct für alle Linien die mit der Grundlinie oder deren Parallelen den Winkel 57^0 bilden und die Winkel α^1, α^2, α^1... würden alle $\overset{=}{p}\ 57^0$ sein.

Der Verschwindungspunct D'' bleibt constant, solange sich die Höhe und Weite des Auges und der Augenpunct nicht ändern. Verändert sich auf einer Bildebene einer der Puncte, welche diese Factoren vertreten, so ändern sich alle perspectivische Beziehungen und die ganze Form der Bilder.

Jeder Verschwindungspunct hat auf der andern Seite des Augenpunctes einen correspondirenden, wie es bei dem Distanzpunct der Fall ist. Jeder liegt in den Schenkeln eines rechten Winkels an O' und beide vermitteln gleichartig. Ueber diese Puncte hinaus ist die Verlängerung einer Schrägen nicht denkbar, denn sie geht schon in dem Puncte selbst ins Unendliche über, sie verschwindet in ihm.

Nach § 40 und 41 würde sich das Bild eines jeden beliebigen Winkels finden lassen, auch wenn kein Schenkel der Grundlinie parallel wäre. Es müßte dann für jeden Schenkel der Verschwindungspunct durch das Bild der perspectivischen Richtung

gesucht werden. Practisch bedient man sich jedoch einfacherer Mittel, welche in dem Folgenden erklärt werden sollen.

44. — Aus den vorhergehenden §§ geht hervor, daß, solange die drei Hauptfactoren der perspectivischen Construction constant bleiben, jeder Winkel an der Grundlinie von ungleicher Größe seinen besondern Verschwindungspunct hat, oder daß für jeden Grad ein anderer dieser Puncte in Wirkung tritt. Dieses führt uns auf die Construction eines Winkelmaßstabes.

Aufgabe. Das Gradmaß für die Winkel der Horizontalebene auf der Tafel zu zeichnen.

Durch den Hülfspunct O' der Verticale lege man eine Parallele mit der Grundlinie, beschreibe einen Halbkreis und theile diesen in die gewöhnliche Gradtheilung (Fig. 19), so daß die Verticale den Halbkreis halbirt. Wir wollen annehmen, der Kreis sei in einzelne Grade getheilt; man ziehe die Radien und verlängere sie bis an den Horizont. Die Theile, welche dadurch auf dem Horizont abgeschnitten werden, sind Tangenten der bezichlichen Winkel in Theilen des Radius AO' und könnten auch mittelst eines tausendtheiligen Maßstabes und einer trigonometrischen Tabelle aufgetragen werden, wobei der Radius AO' als Einheit zu betrachten ist. Wenn der Raum unterhalb zu beschränkt, über dem Horizont aber mehr Spielraum ist, dann kann der Mittelpunct des zu ertheilenden Kreises oberhalb des Horizonts in dem Abstand der Distanz auf der Verticale angenommen werden.

Jede Verlängerung der Gradtheilung ist nun Verschwindungspunct eines Winkels, welcher der Theilung entspricht. Man bezeichnet die Theile auf dem Horizont auf doppelte Art; einmal, daß auf der

Verticale mit 90° angefangen und in abnehmender Ordnung zu beiden Seiten fortgefahren wird; einmal, daß man den Durchschnitt der Verticale mit Null bezeichnet und in aufsteigender Ordnung nach beiden Seiten hin zählt. Die erste Bezeichnung gilt für die Neigung gegen die Grundlinie, die andere für Winkel, die sich auf die Verticale beziehen.

Eine solche ins Detail gehende Theilung des Kreises ist selbst in dem Fall zu mühsam, ja practisch fast unausführbar, wenn viel Winkel auf der Bildebene aufzutragen wären. Wir betrachten sie nur in theoretischem Sinn und rathen an, die Winkel nach dem Bedarf einzeln in O' zu tragen und nach dem Horizont zu verlängern, welches mit Hülfe eines Transporteurs leicht zu bewirken ist.

Man bemerke, daß die Distanzpuncte stets in dem Winkelabschnitt von 45° liegen, weil AD = AO', gleich dem Radius. Ebenso hat jeder Verschwindungspunct seinen Theilpunct für 45°.

45. — Bei Zeichnen von Winkeln auf der Bildebene ohne Vermittelung der Horizontalprojection können folgende Fälle eintreten.

a) Ein jeder Winkel auf der Tafel wird durch die Anzahl Grade gemessen, welche zwischen der Verlängerung beider Schenkel auf dem Horizont abgeschnitten werden (Fig. 19).

So liegen zwischen den Puncten a' und c' der Durchschnitte 80°, daher ist der Winkel abc gleich 80°.

b) Schneidet eine Verlängerung die Grundlinie, wie bei dem Winkel abd, so verlängere man den Schenkel bd über die Spitze hinaus.

Es wird dann das Maß des Winkels abd als Nebenwinkel von abc gleich 180° — 80° = 100° sein.

c) Schneiden beide Schenkel verlängert die Grundlinie wie bei dem Winkel dbe, dann ist derselbe gleich seinem Scheitelwinkel abc, der durch die Verlängerung der beiden Schenkel rückwärts entsteht, gleich 80°.

d) Liegt einer der Schenkel parallel der Grundlinie, so schneidet der andere auf dem Horizont die Maßbestimmung des Winkels unmittelbar ab; wobei von Null der andern Seite über 90° weg gezählt werden muß. Es ist sonach der Winkel fgh gleich $90^{\circ} + 40^{\circ} = 130^{\circ}$. Oder er schneidet die Grundlinie und wird dann durch seinen Nebenwinkel nach b) bestimmt. Da der Winkel fgh $= 130^{\circ}$, so ist dessen Nebenwinkel fgi $= 50^{\circ}$.

e) Alle Winkel der Bildebene, deren Schenkel durch dieselben Theilpuncte des Winkelmessers gehen, messen gleiche Grade und sind $\overset{=}{p}$.

f) Jeder Winkel, dessen Spitze in dem Horizont liegt, ist gleich Null. Denn die Schenkel sind (nach e)) Parallelen.

g) Wird die Neigung einer Linie auf die Verticale bezogen, so ist abO' gleich dem verlangten Winkel. Ist nemlich aO'D'' gleich 36°, so sind abO' und bO'D'' Wechselwinkel, weil aD'' und O'D'' $\overset{\ddagger}{p}$.

46. — **Aufgabe.** Es ist eine Linie ab im Bild gegeben und soll mit ihr der Winkel eab $= 40^{\circ}$ gebildet werden. Es tritt hier der Fall a) ein (Fig. 20).

Verlängere ab nach d, ziehe O'd und zeichne einen Winkel D''O'd gleich 40°. Zieht man aD'', so ist cab der verlangte Winkel $= 40^{\circ}$.*)

---

*) Man braucht den Verschwindungspunct nur auf derjenigen Seite von A zu bestimmen, wohin der zu suchende

47. — **Aufgabe.** Die Linie ab auf der Bildebene sei gegeben, man soll einen Winkel von 70° unterwärts legen.

Verlängere ab nach d, ziehe dO' und trage an dO' einen Winkel dO'd' gleich 70° (Fig. 21), verlängere d'O' nach D'' und lege die Richtung cD'' durch a. Man ist hierbei nach b) verfahren und der Winkel bac ist gleich 70° gemacht. Trägt man an dO' das Supplement von 70°, 110°, so wird dasselbe Resultat erhalten.

48. — **Aufgabe.** Die Linie ab ist gegeben, es soll der Winkel bac gleich 32° gemacht werden. Es ist hier der Fall c) vorhanden (Fig. 22). Man verlängere ab nach D'', ziehe D''O', construire einen Winkel D''O'D''' = 32° und ziehe die Richtung D'''a nach c, wodurch der Winkel bac = 32° entsteht.

49. — **Aufgabe.** Es ist der Winkel bac im Bild gegeben, man soll dessen Maß in Graden finden. Es ist hierbei der Fall d) zu beachten. Verlängert man ac nach D'', zieht O'D'' und mißt den Winkel AO'D'', so ist dieser das Complement von cab, und da dieses hier = 20°, der Winkel selbst 70°. Zieht man mn parallel der Grundlinie, so kann man den Winkel D''O'n = cab unmittelbar finden.

Auf gleiche Weise wird der Winkel acO' an der Verticale in Graden gefunden. Da nemlich ac

---

Schenkel seine Richtung zu nehmen hat. Soll derselbe Winkel nach der andern Seite hin gefunden werden, so hat man an O'D'' einen geometrischen rechten Winkel zu legen, um auf dem Horizont den gegenliegenden Verschwindungspunct zu erhalten. Linien, welche nach zwei solchen correspondirenden Puncten gezogen werden, haben stets eine Neigung von 90° gegen einander, und bilden, sich kreuzend, vier rechte Winkel

und $O'D\overset{+}{p}$ sind, so sind acO' und cO'D'' Wechselwinkel und gleich.

50. — **Aufgabe.** Man soll an eine gegebene Richtung ab einen Winkel $\alpha = 74^0$ antragen, dessen unbestimmter Schenkel durch einen Punct m geht (Fig. 23a).

Man verlängere ab nach dem Horizont in D'', ziehe D''O', trage an D''O' einen Winkel D''O'D''' $= 74^0$ und ziehe die Richtung D'''m nach c; so ist die Aufgabe gelös't und der Winkel bcm gleich 74^0.

51. — **Aufgabe.** Einen Winkel der Bildebene in n (hier sechs) gleiche Theile perspectivisch zu theilen (Fig. 24).

Wie ein Winkel des Bildes nach § 44 durch den geometrischen Winkel in O' bestimmt wird, so ist klar, daß auch die Theile des erstern aus den des letztern gefunden werden müssen.

Hat man demnach den perspectivischen Winkel bac zu theilen, so suche man durch Verlängerung der Schenkel seine Verschwindungspuncte D'' und D''', bilde den Winkel D''O'D''' und theile diesen in die verlangten Theile 1.....6, verlängere die Radien nach dem Horizont und ziehe aus a die Theillinien a1, a2, a3....

Ist einer der Schenkel parallel der Grundlinie, wie bei dem Winkel baz, so hat man den Winkel cO'z geometrisch zu theilen.

Umgekehrt kann man auf gleiche Weise das Vielfache eines Winkels D''ab' finden. Es gibt der geometrische Winkel D''O'1 den Theil o1 des Bogens mn' den man, wie verlangt, n mal zu umschlagen hat, und so in dem Winkel D''O'D''', gleich baD''', das gesuchte Vielfache erhält.

52. — **Aufgabe.** Es ist die Gerade ab auf der Bildebene gegeben, man soll zu

ihr eine Senkrechte ziehen, die den Punct m aufnimmt (Fig. 25).

Die Auflösung ist ähnlich dem § 50; ist aber in dieser Gestalt hier speciell behandelt, weil dieser Fall bei perspectivischen Zeichnungen besonders häufig gebraucht wird.

Ist die Gerade mit der Bildebene parallel, so ist jede Linie, welche sie schneidet und durch den Augenpunct geht, ihr normal; also auch die Richtung Am.

Geht die gegebene Gerade durch einen Distanzpunct, dann ist jede andere, die nach dem andern Distanzpunct gerichtet ist, ihr normal.

Ist aber die gegebene Linie irgend eine beliebige Fluchtlinie, so verbinde man zuerst ihren Verschwindungspunct b mit dem in die Bildebene niedergelegten Hülfspunct O′ (nemlich AO′ = Distanz), ziehe dann auf O′b den geometrisch senkrechten Gesichtsstrahl O′x, wodurch in x der Fluchtpunct für alle Normalen auf ab gefunden ist. Da die Normale den Punct m aufnehmen soll, so ziehe man die Richtung xm nach ab, welche in o mit dieser Linie einen perspectivisch rechten Winkel bilden muß.

53. — **Aufgabe.** Es ist das Bild einer Richtung ab im Raum und deren horizontale Projection in uv gegeben, man soll den Durchgang der Richtung durch die Bildebene finden (Fig. 26).

Es sei ab die gegebene perspectivische Linie und uv deren horizontale Projection. Die Richtung uv kann man als ersten Schnitt einer senkrechten Ebene betrachten, welcher verlängert die Grundlinie in m trifft und durch die gegebene Linie im Raum, deren Bild a′b′ ist, geht. Durch m lege man eine Normale mk und verlängere a′b′ nach h, so ist dieser Punct h der Durchgangspunct der Linie in der Bildebene.

Angenommen, die Linien cd, ef im Raume liegen mit ab in derselben Ebene, so daß uv gleichfalls ihre horizontale Projection oder der Grundschnitt der Ebene ist: so ist der Durchgangspunct für c'd' der Punct k, für e'f' der Punct s, dagegen trifft die Linie xy, deren horizontale Projection der Punct y ist, die Bildebene nicht, weil sie ihr parallel ist. Gewisse Linien, deren Verlängerung die Normale mk unter der Grundlinie schneiden würde, gehen nicht durch die eigentliche Bildebene, wohl aber durch ihre Fortsetzung unter der Grundebene.

Man kann sich von der Richtigkeit überzeugen, wenn man bedenkt, daß mk der Durchschnitt der zurückweichenden Ebene mit der Bildebene, ml aber die Perspective der Grundlinie der zurückweichenden Ebene auf der Grundebene ist.

54. — **Aufgabe.** Es sind dieselben Linien gegeben, man soll ihre Fußpuncte (Fig. 26), d. i. diejenigen Puncte finden, wo die verlängerten Linien die Grundebene treffen.

Da die Linien in einerlei Ebene liegen, so müssen deren Fußpuncte in der Grundlinie dieser Ebene, d. i. derjenigen Linie ml liegen, welche die zurückweichende senkrechte Ebene mit der Grundebene gemein hat. Es kann daher die Normale x'y' ihren Fußpunct nur in y haben.

Der Fußpunct von c'f' fällt nothwendig in r, wo das Bild der Grundlinie (des Schnittes) ml die Verlängerung von cf schneidet. Die Verlängerung von e'f' trifft ml auf dem Horizont in l; der Punct l kann jedoch nur der Fußpunct sein, wenn man eine unendliche Ferne für das Zusammentreffen von ml und ef geltend machen will, denn beide Linien sind

+

hier r.

Schneiden sich die Verlängerungen oberhalb des Horizonts wie bei a' b' in z, so wird zwar der Punct z noch die Perspective des Fußpunctes von a' b' sein, jedoch ohne daß sie auf die Tafel bezogen werden kann; denn es liegt dann der Punct z nicht mehr hinter der Tafel, sondern hinterm Rücken des Beobachters.

Drittes Kapitel.

Von dem perspectivischen Längenmaße horizontaler Linien.

55. — **Achter Hauptsatz.** a) Jede Linie, die in der Bildebene selbst liegt, hat das (verjüngte) geometrische Maß.

Daher haben alle Linien, welche in die Grundlinie fallen oder unmittelbar auf ihr senkrecht stehen, so wie die, deren horizontale Projectionen in der Grundlinie liegen, das Maß, welches der Zeichnung zu Grund gelegt worden ist.

Dergleichen Linien sind bei'm practischen Zeichnen auch die der Einrahmung.

b) Alle mit der Grundlinie parallele oder senkrechte Linien der Grundebene, welche von der Bildebene abwärts, aber zwischen denselben Theillinien liegen, haben dasselbe Maß, welches diese Theillinien auf der Grundlinie oder auf einer senkrechten Linie, die auf ihr steht, abschneiden.

Denn die Theillinien nach einem Verschwindungspunct sind $\neq$ p, und Parallelen schneiden auf Parallelen gleiche Stücke ab.

Auf diesen Hauptsatz gründen sich folgende Aufgaben:

56. — **Aufgabe.** Man soll durch einen im Bild gegebenen Punct b eine Parallele mit der Grundlinie von bestimmter Länge legen.

Man ziehe von dem Augenpunct oder irgend einem andern schicklichen Punct des Horizonts eine Richtung **A B**, welche den Punct **b** (Fig. 27) aufnimmt, bis zu der Grundlinie, nehme **B C** gleich der gegebenen Länge und ziehe **C A**. Diese schneidet in **c** den Endpunct der gesuchten Parallele, wodurch **b c** gleich **B C**, gleich der gegebenen Länge gemacht ist. Auch ist **Bb** gleich **Cc**, weil **AB** $\overset{+}{p}$ **A C** und **b c** parallel **B C**.

57. — **Aufgabe.** Von dem Punct c der Bildebene ab eine bestimmte Länge aufzutragen, welche normal der Bildebene ist. (Fig. 27.)

Man ziehe von **c** die Augenlinie **c A** und verlängere sie rückwärts nach der Grundlinie in **C**, dann durch **c** eine Parallele mit der Grundlinie. Auf letztere trage man das gegebene Maß in **C B** und ziehe **B A**, wodurch **b c** $\overset{=}{p}$ **B C** wird. Von **b** ziehe eine Linie **b D** nach dem Distanzpunct, so wird diese **A C** in **a** schneiden und **a c** $\overset{=}{p}$ **b c** werden. Da nämlich alle Linien, die in **D** convergiren, nach §. 44 mit der Grundlinie eine Neigung von 45° eingehen, so ist das Dreieck ein gleichschenkliches und rechtwinkliches, folglich **b c** $\overset{=}{p}$ **a c** und auch $\overset{=}{p}$ **B C**.

58. — **Aufgabe.** Eine mit der Grundlinie parallele Linie a o des Bildes in n gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe durch a und g Theillinien A D'' und G D'' (Fig. 29) nach einem beliebigen Punct des Horizonts. Hierdurch wird auf der Grundlinie in A G das geometrische Maß von a g abgeschnitten. Theilt man dieses in n gleiche Theile und zieht die Theillinie nach D'', so schneiden diese auch a g in n gleiche Theile.

Man wird in der Aufgabe die bekannte geometrische Theilungsmethode leicht wieder erkennen; sie läßt sich geometrisch durch die ähnlichen Dreiecke, oder perspectivisch aus den Parallelen AD'', BD''... G D'' beweisen. Man brauchte die Theilung nicht auf die Grundlinie zurückzuführen, weil a g auch unmittelbar getheilt werden konnte; weiterer Consequenzen wegen mußte aber hier die Grundlinie in Beziehung kommen. Sie ist unentbehrlich, wenn a g so getheilt werden soll, wie die Grundlinie A G es geometrisch ist; wovon die Aufgabe nur ein specieller Fall ist.

59. — **Aufgabe.** Man soll zwischen den Parallelen ab und cd andere von gleichem Abstand einschalten (Fig. 31).

Man ziehe a D''' beliebig und trage von a nach b soviel gleiche Theile, als Parallelen verlangt werden. Durch den letzten Theilpunct u und den Durchschnitt u'' auf der obern gegebenen Parallele c d ziehe die Theillinie nach dem Horizont, der von ihr in D'' geschnitten wird. Dieser Durchschnitt ist Verschwindungspunct für die Theillinien aus r, s, t.... und wo diese a D''' schneiden, in r'', s'', t''.., lege man die verlangten Parallelen durch.

Nimmt man anstatt des beliebigen Punctes D'' den Augenpunct als Verschwindungspunct und statt D''' den Distanzpunct, dann sind die entstandenen Vierecke, z. B., r r'' s s', s s' t t' u. s. w. perspec-

tivische Quadrate, indem die Diagonalen die Seiten unter 45° schneiden.

Soll nur eine Parallele in gleichem Abstand zwischen zwei gegebene eingeschaltet werden, (Fig. 32) so wird meistens folgendes Verfahren angewendet.

Von einem beliebigen Punct D'' des Horizonts ziehe man zwei Theillinien D'' i und D'' k, welche mit den gegebenen Parallelen ein Parallelogram bilden werden. Die Diagonalen g k und h i müssen sich nothwendig in der Mitte des Abstandes schneiden, bestimmen also in o den Punct, durch welchen die Parallele zu ziehen ist.

Erstrecken sich dagegen die Parallelen in eine solche Tiefe, daß die Grundlinie zur Theilung nicht zureicht, so kann man gleich Anfangs die obere Parallele verhältnißgleich theilen und das $\bar{\bar{p}}$ Maß a'b' von a b auftragen (Fig. 33); besser aber man zieht diejenigen Parallelen, die von der Grundlinie aus bestimmt werden können und trägt auf den zuletzt gefundenen g' k das Maß f' g' fort.

Die Aufgaben 59 bis 61 werden häufig bei der Zeichnung von Fußböden benutzt, wovon folgende Aufgaben Beispiele liefern.

60. — **Aufgabe.** Es soll das Viereck a b c d, welches ein Quadrat ist, mit quadratförmigen Platten gepflastert dargestellt werden. Die Seite einer Platte habe das Maß a 1 (Fig. 34), also ist a b nach diesem Maße zu theilen, die Theillinie a D nach dem Distanzpunct, und aus den Puncten 1, 2, 3 . . . nach dem Augenpunct zu ziehen. Die gefundenen Durchschnitte bestimmen die Lage der Parallelen.

61. — **Aufgabe.** Das perspectivische Rechteck soll mit einer Plattenbelegung ge-

zeichnet werden, wo die Platten gleiche reguläre Sechsecke sind.

Man trage den Radius des umschriebenen Kreises so oft auf die Grundlinie, als es geht. Suche dann nach §. 42, d den Verschwindungspunct D'' für den Mittelpunctswinkel = 60° des Sechsecks und setze ihn zu beiden Seiten von A (Fig. 35 und 36). Das Uebrige erhellet aus der Figur. Die 36. Figur zeigt einen Fußboden mit Würfelparket perspectivisch dargestellt. Die Grundfigur ist ebenfalls ein reguläres Sechseck.

Viertes Kapitel.

Theilung abweichender Linien und Maßbestimmung.

62. — Die perspectivische Lage einer Linie, die gegen die Bildfläche eine Neigung hat, wird einerseits durch den Durchgangspunct, in welchem sie die Bildebene trifft und andrerseits durch den Verschwindungspunct, die Abstufung ihrer Maße aber durch den Theilpunct (Theilungspunct) bestimmt, welche beide in dem Horizont der Bildebene liegen.

Der Verschwindungspunct ist zugleich der Grenzpunct, über welchen hinaus das Bild der Linie sich nicht erstrecken kann; er liegt in unendlicher Ferne und ist allen Linien, welche mit jener parallel sind, gemein.

Jeder Verschwindungspunct hat seinen besondern Theilpunct. Für Senkrechte auf der Grundlinie ist der Augenpunct Verschwindungspunct, der Distanzpunct Theilpunct. Für Neigungen von 45° ist der

Distanzpunct Verschwindungspunct, der Augenpunct ist dazugehöriger Theilpunct.

Im Allgemeinen ist der Abstand des Verschwindungspunctes vom Augenpunct, bei einer Linie die in einem Winkel α von der Grundlinie abweicht, gleich Distz. $\times$ Cotg. α.

Es muß zunächst liegen, den Verschwindungs- und Theilpunct einer abweichenden Linie aufsuchen zu können.

63. — Wir müssen annehmen, daß das perspectivische Bild einer abweichenden Linie nach dem Vorgetragenen ohne Schwierigkeit gefunden werden kann. Die Verlängerung der Richtung im Bilde nach dem Horizont schneidet diesen stets in dem Verschwindungspunct für diese Abweichung, und alle Linien im Raum, die mit dieser Linie parallele Lage haben, haben diesen Verschwindungspunct und den zugehörigen Theilpunct gemein. Es ist sonach noch der Theilpunct zu bestimmen.

64. — **Aufgabe.** Man soll den Theilpunct **t** für den Verschwindungspunct **x** einer Schrägen **ac** finden (Fig. 45).

Es sei **O'** der Hülfspunct auf der Verticale; man beschreibe mit dem Radius **x O'** einen Kreisbogen. Der Durchschnittspunct **t** mit dem Horizont ist der verlangte Theilpunct für **a c**, **a' c'** und alle damit parallelen Linien.

65. — **Aufgabe.** Es soll die Abweichende **ax** in einer Länge geschnitten werden, die gleich **ab** ist.

Es tritt hier die einfachste Benutzung des Theilpunctes ein; man hat nur den Endpunct **b** mit **t** durch eine Theillinie zu verbinden, um mittelst des Durchschnittes **c** das Maß **a b** in **a c** überzutragen. Eben so ist **a' c'** gleich **a' b'** gemacht worden.

66. — **Aufgabe.** Es soll die Theilung in einer senkrechten Ebene geschehen. (Figur 49.)

Aus gleichen Gründen, nach welchen der Horizont der horizontalen Ebene eine horizontale, mit der Grundlinie des Bildes parallele Linie ist, hat auch eine senkrechte Ebene ihren Horizont, und zwar parallel mit ihrer Grundlinie, welche die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Bildebene ist, daher eine senkrechte Linie sein muß.

Die Normale t x ist sonach der Horizont von der senkrechten Ebene und der Verschwindungspunct x der abweichenden Linie **a c** muß nothwendig auch in ihm liegen.

Betrachten wir t' als Theilpunct auf dem eigentlichen Horizont, so muß auch t' x = x O' = t x und t der Theilpunct auf dem senkrechten Horizont sein. Soll nun **a c** gleich **a b** gemacht werden, so ziehe man t b, wodurch die Linie **a** x in c nach dem Maß von **a b** abgeschnitten wird.

Wollte man den Theilpunct t' benutzen, welches zulässig ist, weil die Abweichung der Linie in gleicher Beziehung zu den gedachten Ebenen steht, und derselben Verschwindungspunct beiden Horizonten gemein ist, so muß man a b in a d niederlegen und d t' ziehen; dadurch wird der Schnitt **c** ebenfalls erhalten.

67. — **Aufgabe.** Es soll eine gegen die Grundlinie geneigte Linie **a b** in n gleiche Theile getheilt werden.

Man ziehe **a b'** (Fig. 30) parallel der Grundlinie, theile diese nach Vorschrift, lege die Richtung durch b' und b und schneide mit ihr den Verschwindungspunct D'' auf dem Horizont ab. Die Convergenten nach D'' theilen **a c** perspectivisch in die verlangten gleichen Theile. Es ist nämlich **b b'**

╪ ╪
p i i', p h h'...., daher sind die Dreiecke ähnlich und sonach a b und a b' verhältnißgleich getheilt. Dasselbe Resultat erhält man, wenn man das Stück A B der Grundlinie theilt, und die Theillinien aus diesen Theilpuncten zieht.

Eben so würde man zu verfahren haben, wenn in den vorliegenden Aufgaben die Theile nicht gleich sein, sondern sich verhalten sollen wie m : n : o... Man hat dann anstatt der gleichen Theile die verhältniß gleichen auf die Grundlinie oder deren Parallele zu tragen. Dieses wird häufig bei architectonischen Gegenständen benutzt.

Es sei, z. B., a b die Fluchtlinie eines Gebäudes, auf welche die Thür- und Fenstertheilung, Pfeiler u. s. w. aufgetragen werden sollen. Trägt man die Maße geometrisch von A nach B der Grundlinie, zieht durch die so bestimmten Puncte Theillinien nach D'', so schneiden diese auf a b die Fußpuncte der architectonischen Eintheilung ab.

Fünftes Kapitel.

Von dem perspectivischen Längenmaße senkrechter Linien.

68. — Das Bild aller Verticallinien im Raum ist stets normal der Grundlinie, denn jede Ebene, die man durch die Linie legt, wird in beliebiger Drehung um die Linie normal der Grundebene sein und, wo sie die Bildebene trifft, diese senkrecht der Grundlinie schneiden.

Um eine Senkrechte im Bilde wiederzugeben, muß man ihren Fußpunct oder Durchgang durch die Grundebene und die Höhe kennen. (Fig. 37.)

Es sei, z. B., die horizontale Projection **K** einer Senkrechten gegeben, so ist nach §. 31 das Bild des Punctes **K** oder der Fußpunct der Senkrechten der Punct **k**. Die Senkrechte **m m′** habe das geometrische Maß und sei gleich der gegebenen Höhe. Zieht man durch **m** und **k** eine Richtung nach dem Horizont, welche ihn in **D** trifft und noch **m′ D**, so sind diese zwei Parallelen, zwischen denen alle Parallelen wie **m m′**, **k k′**, **i i′** gleiche und zwar die gegebene Höhe haben müssen; jede in Bezug auf ihren Fußpunct, mit dem sie in verschiedenem Abstand von der Bildebene auf der Grundebene steht. Auch **q q′** würde die gleiche Länge haben, wenn **p p′** Grundlinie wäre; so tritt diese Linie aber zwischen den Beobachter und die Tafel, muß daher nach einem verjüngten Maß gemessen werden, welches gefunden werden kann, wenn man mittelst Theillinien aus **D** die Maßeinheit von **m m′** auf **q q′** abschneidet. Diese Einheit verhält sich aber wie die genannten Linien.

69. — Wenn eine Ebene parallel der Bildebene ist, so bilden alle Linien auf ihr ähnliche Figuren mit ihrem Bilde, und Linien (Fig. 38), die auf ihr parallel sind, bleiben es auch im Bilde.

Dieses festgestellt, sei **I K′** der Schnitt einer mit der Tafel parallelen Ebene, auf welcher **C C′** normal steht.

Denken wir uns diese Ebene nach der Bildebene vorschreitend, ohne die Augenaxe zu ändern, so muß nothwendig der Punct **C** ihres Fußes auf der Linie **A B** fortschieben, weil **A B** perspectivisch senkrecht der Grundlinie ist; ebenso der Punct **C′** und **b**, **b′** auf den durch sie gehenden Theillinien, weil diese sämmtlich ╪ **p** und senkrecht der Bildebene sind. In der Grundlinie **C°** angelangt, werden daher die Puncte **C** in **B**, **C′** in **B′**, **b** in **a** und **b′** in **a′** fallen.

Werden nun die abgeschnittenen Stücke auf der Normalen BB' als geometrische Maße betrachtet, so müssen auch die auf C C' dieselben Maße in perspectivischer Beziehung sein und zwar in Hinsicht auf den Standort C der Grundebene, je nachdem dieser von der Bildebene abgerückt ist. Die Höhenlinie eines noch weiter abgerückten Punctes D wird durch dieselben Theillinien nach gleichem Maß geschnitten, und so wird auch die Senkrechte m m', die mit C C' in einerlei paralleler Ebene und zwischen gleichen Parallelen liegt, das Maß von B B', C C' und D D' haben.

Dieses führt auf die Construction eines Höhenmaßstabes nach einer bestimmten geometrischen Einheit.

70. — **Aufgabe.** Den Höhenmaßstab für eine gewisse Längeneinheit, z. B., den Fuß, auf dem Bilde zu entwerfen.

Ist a b die Grundlinie, a c eine auf ihr normale Höhe (Fig. 39), so trage man auf ac eine Anzahl Fuß nach dem angenommenen verjüngten Maßstab in 1, 2, 3, 4...., nehme auf dem Horizont einen Punct V an, und ziehe aus ihm Theillinien nach den Fußtheilungen; hiermit ist der Höhenmaßstab construirt.

Hat man nun die Höhe einer Senkrechten im Bilde, die in dem Punct m der Grundebene steht, 5 Fuß lang zu machen, so ziehe man m m' parallel der Grundlinie, errichte in m', dem Durchschnitt mit a V, eine Normale m' n' bis zur Theillinie V 5 und ziehe durch n' eine Parallele nach n, welche dann die Höhe gleich 5 Fuß auf m n abschneidet. Ein Gleiches ist es mit den Senkrechten in den Puncten o und q der perspectivischen Grundebene.

Umgekehrt wird eine Höhe q r des Bildes gemessen, wenn die beiden Parallelen q q' und r r', dann aus dem Durchschnittspunct q' eine Normale

gezogen werden; hier bestimmt dann diejenige Theillinie (wie V 7), in welche der Durchschnitt von r r' und q' r' fällt, das Fußmaß der Senkrechten q r.

Practisch genommen ist es nicht nöthig, außer a V die Theillinien in'sgesammt zu ziehen. Soll nämlich o p 6 Fuß hoch gemacht werden, so ziehe man die Parallele o o', in o' eine unbestimmte Normale und schneide sie durch 6 V.

Eine Parallele aus dem Durchschnitt p' nach o p gezogen, schneidet dann in p die Höhe von 6 Fuß ab.

Zugleich kann man das Bild vorrichten, um Längen, die auf der Grundebene liegen, nach demselben Maßstabe zu bestimmen oder zu messen, daß man auf die Grundlinie a b ebenfalls die Fuße von a c trägt. Wie dieser Maßstab zu gebrauchen, ist in den vorhergehenden Aufgaben genügend erörtert. Uebrigens ist die Horizontale m h und die Normale m n sowohl geometrisch als p, denn sie liegen in einerlei dem Bild parallelen Ebene und die Theillinien aus V' schneiden auf der Grundlinie 5 Fuß ab.

71. — Es ist zuweilen die Kenntniß des Maßstabes erwünscht, welcher dem Zeichner gedient hat. Dessen Auffindung ist möglich, wenn man die Höhe des Horizonts über der Grundlinie oder eines Gegenstandes des Bildes ermitteln kann. Liegt der Horizont vielleicht in der zweiten Etage eines Wohngebäudes, so kann man schätzen, daß sein Abstand von der Grundlinie gegen 17 Fuß angenommen sei, weil man 12 F. für die Etage und 5 — $5\frac{1}{2}$ F. noch für die Mannshöhe rechnen kann. Auch die Staffage gibt zuweilen einen ziemlich richtigen Maßstab, wenn die Höhe eines erwachsenen Mannes zu 5 bis $5\frac{1}{2}$ Fuß gesetzt wird. Am meisten sind Gebäude geeignet, über die Lage des Horizonts, des

16 *

Augen- und Distanzpunctes ꝛc. Auskunft zu geben, vor Allem aber, wenn Gegenstände im Bilde vorhanden sind, welche Quadratform haben.

72. — Bevor wir zu den Flächenfiguren übergehen, mögen noch die wichtigsten Fälle behandelt werden, wo die gewöhnlichen Regeln nicht ausreichen, die daher den Zeichner oft in Verlegenheit bringen können.

Sechstes Kapitel.

Hülfs-Constructionen in Verlegenheitsfällen.

Die beschriebenen Constructionen erfordern mehrentheils einen großen Raum, der bei größern Ausführungen bald oberhalb, bald unterhalb, bald seitwärts entweder ganz fehlt oder doch nur durch umständliche Vorrichtungen beschafft werden kann. Die Geometrie bietet mancherlei Mittel, sich in dergleichen Verlegenheiten zu helfen und die Constructionen auf den bedingten Raum zu beschränken.

73. — 1. **Fall.** Wenn die Zeichnenebene nicht Raum genug gewährt, um die Distanz seitwärts des Augenpunctes zu setzen.

In diesem Fall bedient man sich, wie bereits erwähnt (Fig. 40), des leichten und bequemen Mittels, daß man nur einen aliquoten Theil der Distanz nimmt. Man nennt dieses die Hebung.

Es sei das Maß der Linie ab auf ae zu tragen, der Distanzpunct aber zu weit abgelegen, daß er benutzt werden könnte. Man nehme daher die halbe Distanz und trage sie in Ad, halbire auch $\overline{ab}$ in c und ziehe cd. Diese Linie schneidet ae P ab. Auf gleiche Weise läßt sich das Drittel, Viertel der

Distanz benutzen, man muß nur denselben aliquoten Theil auch von allen andern Linien nehmen, die bei der Construction concurriren.

74. — 2. **Fall.** Wenn der Raum oben oder unten nicht gestattet, den Hülfspunct auf die Verticale zu setzen.

Da nach dem gewöhnlichen Verfahren der Hülfspunct O' (Fig. 41) zum Aufsuchen des Verschwindungspunctes eines Winkels oder einer schrägen Linie gebraucht wurde, so muß in dem vorausgesetzten Fall ein anderer Punct seine Stelle vertreten.

Es sei ax die Grund- und untere Rahmenlinie der Zeichnung und es soll eine Linie perspectivisch gezogen werden, die 38° von der Verticale abweicht. Man trage die halbe Distanz nach r, ziehe rs normal Ar und trage den gegebenen Winkel in rAs. An As setze man einen Winkel von 2 . 38° = 76° und verlängere den Schenkel zum Horizont in D''; so ist Ag die Tangente von 38° und D'' der Verschwindungspunct für alle gleiche Winkel.

Es ist nemlich der Winkel D''As = Asr, D''Ar = 90° und die Dreiecke sAr und AO'D'' (unter O' den fehlenden Hülfspunct verstanden) sind ähnlich.

75. — 3. **Fall.** Es soll ein Winkel α auf der Bildebene construirt werden, die Linie des Horizonts kann aber nicht so weit verlängert werden, oder es verhindern andere Umstände, die Tangente des Winkels auf dem Horizont aufzutragen (Fig. 42).

Die Lösung kann in diesem und ähnlichen Fällen mit Hülfe des Grundrisses erfolgen.

Ist ab der eine Schenkel, A der Augenpunct, D der Distanzpunct, so betrachte man ab als Grundlinie, trage an sie den gegebenen Winkel α in abc, nehme auf bc einen beliebigen Punct c an und suche nach § 3 dessen Perspective d. Die Richtung bd

nach dem Horizont verlängert, würde den Verschwindungspunct für Winkel gleich α abschneiden.

Kehrt man die Construction um und sucht den Punct c des Grundrisses, so erhält man den geometrischen Winkel und kann auf diese Weise das Maß des perspectivischen Winkels finden.

Wenn der eine Schenkel des Winkels nicht parallel der Grundlinie im Bilde gegeben ist, so kann man dessen Richtung zuerst auf die Grundebene projiciren, daran den Winkel α tragen und dann die Perspective des Winkels construiren.

76. — 4. **Fall.** Man hat mit bd im Bilde eine Parallele zu ziehen, ohne den Verschwindungspunct D'' benutzen zu können (Fig. 43).

Diese Aufgabe ist nur Wiederholung der vorhergehenden, nur daß man gh als Grundlinie nimmt und den Richtpunct k des andern Schenkels, der den gleichen Winkel α bildet, sucht. Dieser Schenkel muß nothwendig gehörig verlängert mit der Verlängerung von bd in einem Puncte des Horizonts zusammentreffen. In Folge dieser Eigenschaft läßt sich auch die Linie des Horizonts benutzen (Fig. 44), um mit bd eine Parallele zu ziehen und zwar mittelst einer rein geometrischen Construction.

Ist der gegebene Punct e innerhalb des Raumes zwischen der gegebenen Linie cd und dem Horizont ab befindlich, so ziehe man eine beliebige Schneidende ad und eine andere ac durch e; dann bd parallel ac, eg parallel ab und gf parallel cd.

Der Punct f ist ein zweiter Richtpunct zu e, so daß die Richtung ef mit ab und cd in einem Puncte x convergiren wird.

Liegt der gegebene Punct, welcher hier d sei, außerhalb der Winkelebene, se ziehe man beliebig bd durch d und ac parallel bd, verbinde d mit a, ziehe

eg parallel ab, dann gf und lege durch d eine Parallele mit gf. Diese ist das gewünschte Resultat.

77. — 5. **Fall.** Es soll zwischen zwei Parallelen im Bild eine dritte gezogen werden, die von beiden gleichen Abstand hat, ohne daß der Verschwindungspunct benutzt werden kann. In geometrischer Beziehung lautet diese Aufgabe: man soll zwischen zwei convergirenden Linien (Fig. 45), deren Vereinigungspunct nicht gefunden werden kann, eine dritte ziehen, die den Winkelraum halbirt.

Aus beliebig angenommenen Puncten der Richtungen ab und cd ziehe man Normalen qm und tn und gebe ihnen gleiche Länge; lege durch m und n Parallelen mit ab und cd, halbire den Winkel mhn durch ho, wie bekannt, so ist ho die gesuchte Halbirungslinie der Winkelebene und die verlangte perspectivische Parallele.

78. — 6. **Fall.** Man hat eine größere Anzahl Parallelen zu ziehen, ohne den Verschwindungspunct benutzen zu können. (Fig. 46).

Es sei bc die gegebene Richtung und ed der Horizont. Man lege zwei Parallelen be und cd durch die beiden genannten Linien*), theile die abgeschnittenen Stücke be und cd in eine gleiche Anzahl gleicher Theile 1, 2, 3, 4... und denke die gleichnamigen Theilpuncte verbunden. Diese Verbindungslinien werden nothwendig in einem Punct des Horizonts convergiren. Liegt nun ein Punct x auf einer dieser Convergenten, so ist sie selbst die Richtung, welche die Parallele durch x erhalten muß; liegt der Punct y zwischen zwei Convergenten, dann

*) Anstatt dieser Parallelen kann man die Randlinien der Zeichnung und die Verticale benutzen.

ziehe man die Parallele so, daß sie in dem gleichnamigen Zwischenraum auf oe und cd verhältnißgleiche Theile abschneidet.

Auf diese Weise lassen sich viele perspectivische Parallelen über und unter dem Horizont ziehen, wenn man die Theilung auf oe und cd weit genug fortsetzt.

79. — 8. **Fall.** Es schneiden sich zwei perspectivische Linien ab und cd unter so spitzem Winkel, daß der Durchschnittspunct unsicher wird; man soll ihn durch Construction genauer bestimmen.

(Fig. 47) Man errichte in möglichst großem Abstande von dem Durchschnitt auf einer der Schneidenden die Normalen bf und ae, trage bd nmal auf bf und auch ac nmal auf ae, verbinde die letzten Theilpuncte: so schneidet diese Verbindungslinie den genauen Durchschnittspunct in m.

Das Verfahren ist sehr nützlich zu genauer Bestimmung der Verschwindungspuncte, die häufig spitzig und unsicher geschnitten werden.

80. — 7. **Fall.** Der Verschwindungspunct einer Linie cd kann auf der Tafel nicht bestimmt werden (Fig. 50), man soll ohne ihn den Theilpunct der Linie, d. i. denjenigen Punct finden, durch den die Länge der Linie nach einem gegebenen Maße bestimmt werden kann.

Man ziehe aus dem Hülfspunct O′ eine Linie O′D nach dem Horizont, und aus dem Durchschnittspunct von cd und der Verticale die Linie Fg parallel der Grundlinie; verbinde dg und ziehe O′x parallel dg und O′z parallel BC. Den Winkel xO′z halbire man in t′ und verlängere die Halbirungslinie zu dem Horizont in t, welches der gesuchte Punct ist.

81. — Jede schräge Linie bi läßt sich mittelst ihres Theilpunctes t nach geometrischem Maße theilen, wenn man aus t durch die Endpuncte b und i der Schrägen Theillinien nach der Grundlinie zieht und das zwischenliegende Stück der Letztern nach dem gegebenen Maße theilt, aus den Theilpuncten aber die Theillinien nach t zieht, durch welche die gegebene Linie gleichartig mit der Grundlinie getheilt wird. Sollen die Theile auf bi nur perspectivisch gleich oder verhältnißgleich sein, so daß das geometrische Maß nicht in Betracht kommt, so vertritt jede und am bequemsten diejenige Parallele, die man durch einen Endpunct der gegebenen Linie legt, die Stelle der Grundlinie und man hat nach gezogenen äußersten Theillinien das abgeschnittene Stück auf der stellvertretenden Parallele zu theilen.

Will man den Theilpunct nicht suchen, so kann man sich des Verfahrens bedienen, welches § 74 beschrieben worden, wobei man jedoch das Maß des perspectivischen Winkels kennen muß.

82. — 9. **Fall.** Es soll die Linie ib des Bildes in drei gleiche Theile getheilt werden, ohne den Theilpunct benutzen zu können (Fig. 51).

Man ziehe ab parallel der Grundlinie, setze an diese Linie in b den bekannten Winkel dab, ziehe ai nach a und bd normal ab. Durch die Theilung von ad in die verlangten Theile und deren Projicirung auf ab wird auch diese verhältnißgleich getheilt. Zieht man noch die perspectivischen Parallelen Af, Ae, so theilen diese bi nach demselben Verhältniß. Hätte man den Theilpunct t benutzen können, so wäre durch t_3 das zu theilende Stück abgeschnitten worden und man hätte dieselben Puncte durch die Theillinien aus t erlangt.

83. — 10. **Fall.** Es ist die Linie ac und der perspectivische Winkel bac = 40° gegeben (Fig. 28), der Verschwindungspunct für die Richtung ac auf der Tafel aber nicht bestimmbar: man soll den Theilpunct finden.

Nimmt die Tafel den Hülfspunct O' auf, so daß die Distanz bekannt ist, so setze man die halbe Distanz in Ad, ziehe de normal Ad und trage an die Verticale in A einen Winkel gleich $\frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$, dessen Schenkel die Normale in e schneiden wird. An Ae lege man den gegebenen Winkel Aet = 40° und verlängere den Schenkel zum Horizont in t. Dieser Punct ist der Theilpunct für die Linie ac und alle mit ihr parallelen Richtungen.

Kann man den Hülfspunct O' selbst, nicht aber den Verschwindungspunct x benutzen, um nach dem gewöhnlichen Verfahren O'x gleich xt zu machen, so trage man in O' einen Winkel AO't gleich $\frac{40^\circ}{2}$ und verlängere den Schenkel nach dem Horizont, wodurch derselbe Punct t erhalten wird.

84. — 11. **Fall.** Es sei die Linie ab und ihre Abweichung von der Verticale gleich 50° nebst der Distanz gegeben: man soll den Theilpunct finden (Fig. 52).

Man nehme einen aliquoten Theil der Distanz, vielleicht $\frac{1}{3}$, und trage ihn von A nach a' oder a''. In a' bilde man den gegebenen Winkel Aa'b' gleich 50°, schneide mit dessen Schenkel den Horizont in b', und trage b'a' in b'c'.

Die Länge Ac' setzt man dann von A nach y, so oft als der genommene Bruchtheil in der Distanz enthalten ist, hier 3mal, und erhält so in y den gesuchten Theilpunct. Der Beweis beruht auf der

Aehnlichkeit der Dreiecke AxD, Ab'a' und DAy, Aa'c'.

85. — **Aufgabe.** Man soll das Bild einer Linie Fk finden, die, gegen die Grundebene geneigt, durch ihren Horizontalwinkel abC und durch den Höhenwinkel afk gegeben ist (Fig. 53); überdies ist der Durchschnittspunct b der Projection in ihrer Verlängerung mit der Grundlinie BC und der Durchgangspunct F der Linie mit der Grundebene bekannt.

Der Horizontalwinkel, welchen die Projection mit der Grundlinie bildet, sei 60° und der Höhenwinkel 20°. Man suche den Verschwindungspunct a eines Winkels AO'a gleich dem Complement von 60° d. i. die Tangente Aa von 30° und ziehe ba, welches die Projection der gesuchten Linie ist. Man bestimme ferner die Projection des Punctes F oder des Abstandes bf, suche den Theilungspunct t und lege in ihn einen Winkel atr gleich 20°, errichte auf DE in a eine Normale, die den Schenkel des Winkels in r schneidet, so ist fk das Bild einer Linie, welcher ein Horizontalwinkel von 60° und ein Höhenwinkel von 20° entspricht.

Verlängert man ra nach t'' und macht rt' gleich at, dann ist t' der Theilpunct, nach welchem br mittelst der auf BE aufgetragenen Scale zu theilen ist.

Dritter Abschnitt.

Geradlinige Figuren, die auf horizontalen oder senkrechten Ebenen liegen.

86. — **Aufgabe.** Es soll ein rechtwinkliches Dreieck im Bild construirt werden, dessen Katheten 7 und 5 Fuß lang

und wovon ab ihrer Lage und parallelen Stellung gegen die Grundlinie nach, gegeben ist (Fig. 54).

Man ziehe die Richtung Aa durch den Endpunct a bis zum Durchschnitt mit der Grundlinie, setze von dem Durchschnittspunct o ab 7 Fuß und ziehe A7, wodurch ab die gleiche perspectivische Länge erhält. Da nun bc Kathete ist, ihr Verschwindungspunct daher in A, ihr Theilpunct in D liegt, ziehe man Db und schneide mn mit 5 Fuß durch die Theillinie nD, so ist die Spitze c und das verlangte Dreieck construirt.

87. — **Aufgabe.** Das rechtwinkliche Dreieck mno, dessen Hypotenuse gleich 8 Fuß und parallel der Grundlinie liegt, und dessen eine Kathete 6 Fuß ist perspectivisch zu zeichnen (Fig. 55).

Das Verfahren § 3 mit Hülfe des Grundrisses o'm'n' ist hier das einfachste. Hat man das geometrische Dreieck zuvor umgekehrt an die Grundlinie gelegt, schneide man das Maß von der Hypotenuse auf mn ab, ziehe aus der Spitze o' eine Normale o'p auf die Grundlinie und aus deren Fußpunct eine Gesichtslinie nach A, welche der geometrische Ort für die Spitze o ist. Trägt man noch o'p in o''p und zieht die Theillinie o''D, dann ist deren Durchschnitt o auf pA die Spitze des Dreiecks im Bilde.*)

88. — **Aufgabe.** Sind die drei Seiten eines Dreiecks a'b'c gegeben (Fig. 56), so ist wieder wie bei der vorigen Aufgabe zu verfahren,

*) Das Verfahren, einen auf der Grundebene gegebenen Punct in die Bildebene zu tragen, ist hier absichtlich wiederholt worden, um es sicherer in's Gedächtniß zu bringen, da dessen Anwendung häufig aus Verlegenheit helfen muß und gleichsam die Grundlage aller perspectivischen Operationen ist.

nachdem man den Grundriß umgekehrt an die Grundlinie a′b′ gezeichnet hat.

89. — **Aufgabe.** Auf die Richtung ab ein Dreieck zu zeichnen, wenn die mit der Grundlinie parallele Seite ab geometrisch gleich a°b°, die anliegenden Winkel gleich 54° und 46° gegeben sind (Fig. 57).

Die Seite ab wird durch die Gesichtslinien a°A und b°A nach dem gegebenen Maße abgeschnitten. Um die genannten Winkel anzutragen, ziehe man durch den Hülfspunct O′ die Linie mn parallel der Grundlinie, trage an mn in O′ die Winkel 46° und 54° geometrisch und verlängere die Schenkel zum Horizont, wo sie die beiden Verschwindungspuncte D″ und D‴ abschneiden. Man hat dann noch aD″ und bD‴ zu ziehen, um durch deren Durchschnitt c die Spitze des Dreiecks zu erhalten.

Will man ein congruentes Dreieck a′b′c′ perspectivisch zeichnen, schneide man auf a′b′ das gegebene Maß a°b° und ziehe die Theillinien aD″ und bD‴.

90. — **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck im Bild zu zeichnen, dessen gegebene Kathete ab von der Grundlinie abweicht, der Winkel an b gleich 75° ist (Fig. 58).

Man suche den Verschwindungspunct von ab, welcher in c fällt, ziehe nach dem Hülfspunct O′ die Linie cO′ und derselben normal O′d, so ist d der Verschwindungspunct für die andere Kathete. Um den für den Winkel fba zu finden, trage man an die Horizontale mn in O′ den Winkel gleich 75°; dessen Schenkel schneidet ihn auf dem Horizont in e ab. Man hat noch ad und be zu ziehen, um die Spitze F des Dreiecks zu bestimmen und das Dreieck zu schließen.

Die Dreiecke $a^1b^1f^1$ und $a^2b^2f^2$ sind dem gefundenen ähnlich, weil ihre Seiten in denselben Verschwindungspuncten c, d und e ausgehen, also dieselben Winkel einschließen.

91. — **Aufgabe.** Es ist der Grundriß eines Quadrats gegeben (Fig. 59), dessen Seite parallel der Grundlinie liegt: man soll die horizontale und senkrechte Perspective desselben zeichnen.

Da das Quadrat von der Grundlinie abliegt, so suche man zuerst das Bild der Puncte b' und c' nach § 3, ziehe die Theillinie bD, auf welcher die Diagonale liegen muß, weil D der Verschwindungspunct für 45° ist und lege durch den Durchschnittspunct mit der Gesichtslinie cA die Parallele da, wodurch das Quadrat abcd geschlossen wird.

Die eine Seite cd muß nothwendig mit der des senkrechten Quadrats zusammenfallen, wenn man das letztere an die horizontale Projection stellt. Die Seiten de und cf sind bedingungsweise normal, also parallel AO'; cf ist gleich bc, weil beide in einer Ebene liegen, die parallel der Bildebene ist, fe aber hat die Richtung nach A, als Senkrechte auf der Bildebene. Daraus ist das Quadrat cdef leicht zu zeichnen.

92. — **Aufgabe.** Ein Quadrat in Perspective zu legen, dessen Diagonale da senkrecht der Grundlinie und in der Grundebene liegt (Fig. 60).

Es sei die andere Diagonale bc im Bilde gegeben, sie muß zur Grundlinie eine parallele Lage haben, und die Seiten bilden mit ihr halbe Rechte, haben daher ihre Verschwindungspuncte in den Distanzpuncten D und D', während die senkrechte Diagonale ad nach A läuft. Die Bildung des Quadrats ergibt sich also unmittelbar durch die

Theillinien durch die gegebenen Endpuncte b und c, und ebenso in den drei andern Quadraten, die völlig perspectivisch congruent sind, aber in verschiedenem Abstand von der Bildebene liegen, und zwar liegt D am weitesten ab.

Man kann sich übrigens vorstellen, daß die Quadrate A und B auf dem Fußboden, die C und D an der Decke eines Zimmers ihre Lage haben.

93. — **Aufgabe.** Es ist eine Linie mn parallel der Grundlinie gegeben, man soll ein Quadrat perspectivisch zeichnen (Fig. 61), in dessen Mitte die gegebene Linie liegt.

Man ziehe durch die Mitte o von mn die diagonale Theillinie aA und durch m und n Gesichtslinien nach A. Die Ecken des Quadrats a und d liegen auf den Durchschnitten und ist das Quadrat leicht zu ergänzen.

Liegt die gegebene Linie schräg und soll durch die Mitte des Quadrats gehen, so hat man zuvor die perspectivische Mitte von mn nach § 67 zu suchen und dann wie oben zu verfahren.

94. — **Aufgabe.** Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seitenlänge 3 Fuß und dessen Abstand von der Grundlinie und Verticale ebenfalls 3 Fuß ist.

Man theile auf der Grundlinie 3 verjüngte Fußeinheiten von dem Grundpunct A' aus ab, ziehe 3A und A'D; der Durchschnitt a gibt eine Ecke des Quadrats, die andere wird auf der Gesichtslinie aA, die dritte auf der Theillinie aD liegen. Die Länge der Seiten läßt sich bequem durch ad bestimmen, welches nach der erstern Operation 3 Fuß lang geschnitten ist. Man hat daher ab gleich ad zu machen und kann nun das Quadrat vervollständigen.

95. — **Aufgabe.** Auf die abweichende Seite ab in der Bildebene soll ein Quadrat gezeichnet werden.

Die gegebene Linie hat ihren Verschwindungspunct in c (Fig. 63), folglich auch die parallele Seite ef. Den Verschwindungspunct g für die andern beiden Seiten zu finden, operire man nach § 49; dann suche man den Theilpunct d für die Diagonale, indem man den Winkel gO'c halbirt; hierdurch sind alle Mittel gefunden, das Quadrat zeichnen zu können.

96. — **Aufgabe.** Zu der Construction eines Quadrats ist die Seite ab gegeben, (Fig. 64), es ist auf der Zeichnenebene aber kein Raum vorhanden, um die Distanz auftragen zu können.

Da die Ecke b nahe an der Randlinie liegt, so kann nur ein Viertel A1 der Distanz genommen werden. Man hat daher nach § 73 auch ab in Viertel zu theilen und 1,1 zu ziehen, welche auf der Gesichtslinie bA die Ecke in demselben Puncte e schneidet, als hätte man die ganze Distanz benutzt.

97. — **Aufgabe.** Es soll ein System von Quadraten neben und über einander gesetzt werden (Fig. 65.).

Da diese Aufgabe dasselbe besagt, was bereits § 57 ausgeführt worden ist, so verweisen wir auf jene Construction und bemerken nur, daß dabei die Anwendung von irgend einem aliquoten Theil der Distanz häufig nöthig wird.

98. — **Aufgabe.** Es sind mehrere gleiche Rechtecke senkrecht in gleichem Abstand über einander zu stellen, so daß sie parallel der Grundebene liegen.

Die Seiten der Rechtecke sollen sich wie 5 : 2 verhalten; man hat daher af in 5 gleiche Theile zu theilen, aus a und F Gesichtslinien zu ziehen (Fig. 66) und die Breite durch die Theillinie bD abzuzuschneiden. Man erhält so das Quadrat abcd

und das verlangte erste Rechteck afce. Mit dessen Hülfe lassen sich die übrigen einfach finden, wenn man in a, f, c und e Normalen errichtet, den gleichen Abstand aa^1, a^1a^2.... aufträgt und Gesichtslinien zieht, welche die Ecken unmittelbar schneiden. Man bemerke, daß von den Rechtecken a^3 und a^4 die unteren Flächen gesehen werden, weil beide über dem Horizont liegen.

99. — **Aufgabe.** Es ist ein senkrechtes Quadrat zu construiren, dessen Grundlinie von der Grundlinie der Bildebene abweicht. Die Seite sei 5 Fuß, der Abstand der Ecke a von der Grundlinie 1 Fuß, der Abstand der Ecke b von der Verticale durch die Länge o,b gegeben.

Der Theilpunct t sei bereits gefunden. Der Eckpunct b liegt in dem Durchschnitt von 6t und b,A, denn o'b ist gleich dem Abstand o,b,, und o,t ist die Theillinie, welche den Anfang von 5 Fuß der Quadratseite abschneidet. Der andere Eckpunct liegt auf der Theillinie des fünften Fußes und der Gesichtslinie aus der Fußeinheit, welche der Abstand von der Grundlinie sein soll. Da der Verschwindungspunct für ab nicht auf die Zeichnenebene fällt (Fig. 67), so bediene man sich des Höhenmaßstabes, welcher hier einfach gefunden wird, indem man durch a und b Parallelen mit der Grundlinie legt, aus den Endpuncten einer Fußeinheit o,1 nach irgend einem Punct D des Horizonts zieht und dadurch auf jenen Parallelen in op die Fußeinheit für die Senkrechten in der Verticalebene o'bA, und in mn die für alle Senkrechte auf der Horizontalen erhält. Trägt man also mn fünfmal auf ac und op in derselben Zahl auf bd, so ist das Quadrat gefunden.

100. — **Aufgabe.** Es soll ein Rechteck abcd perspectivisch gezeichnet werden, wel-

ches auf der Grundebene senkrecht steht (Fig. 68). Die Richtung von ab treffe die Grundlinie in a', der Abstand des Durchgangs a' von der Verticale sei 5 Fuß, der Winkel b'a'q 80 Grad, der Abstand a'a, 2 Fuß, die Grundlinie ab gleich 6 Fuß und die Höhe des Rechtecks 3 Fuß.

Hat man den Verschwindungspunct von 80° in q gefunden, so trage man von A' nach a' 5 Fuß, ziehe a'q, nehme a'a'' gleich 2 Fuß und ziehe die Theillinie a''t (wie man den Theilpunct t zu bestimmen hat, ist bekannt). Das Maß von ab = 6 Fuß abzuschneiden, mache man a''b' gleich dieser Länge und ziehe b't. Zu Bestimmung der Höhe, ist auf a'b' in a' eine Normale zu errichten, diese 3 Fuß lang zu machen und d'q zu ziehen; letztere wird die Normalen in a und b in gleicher Länge perspectivisch schneiden und somit das Rechteck ergänzen.

101. — **Aufgabe.** **Es ist der Durchmesser eines Kreises auf der Bildebene gegeben, es soll der Kreis gezeichnet werden (Fig. 69).**

Man beschreibe mit dem Halbmesser ai einen Viertelkreis, halbire ihn in e' und ziehe e'm', e'l' parallel den Radien h'i' und a'i'. Den Abstand a'l' gleich h'm' trage man Fig. 69,b in ak und bl, construire das umschriebene Quadrat cdef und ziehe die Gesichtslinien kA und lA, sowie die Diagonalen des Quadrats. In den Durchschnitten c'd'e'f' und agbh ergeben sich acht Puncte des Kreises, hinlänglich, um ihn aus freier Hand einzeichnen zu können.

102. — **Aufgabe.** **Nach einer andern Construction, wenn der Durchmesser gh des Kreises oder die Seite ab (Fig. 70) des umschriebenen Quadrats gegeben ist, führe**

man dieses zuerst aus; suche die Mittel e von ab, ziehe die Gesichtslinie eA, dann af, bf, de und ce und durch die Schnitte den Durchmesser gh. Von a und b trage man $\frac{1}{5}$ ae (näher ist ai = bk = $\frac{3}{10}$ des Radius) nach i und k und ziehe iA, kA. Die Durchschnittspuncte e1g2f... geben ebenfalls die nöthigen Puncte des Kreises.

103. — **Aufgabe**. Sind dieselben Bedingungen gegeben, so läßt sich der Kreis auch nach folgender Construction zeichnen, welche die unbequeme Theilung in Fünftel beseitigt (Fig. 71).

Nachdem das Quadrat, dessen Mittelpunct und beide normale Durchmesser gefunden sind, ziehe cg, dh, ah und bg, theile ae und be in zwei gleiche Theile, in i und k und ziehe gi, hk. Legt man durch die Schnitte 1,4 Gesichtslinien, so sind abermals acht Puncte der Kreislinie gefunden.

104. — **Aufgabe.** Eine andere Construction ist die, welche sich auf den geometrischen Satz gründet: daß jeder Peripheriewinkel (Fig. 72), dessen Schenkel die Endpuncte eines Durchmessers aufnehmen, ein Rechter ist.

Ist ab ein Durchmesser, welcher von der Grundlinie abweicht, so ziehe man aa′ beliebig, verlängere die Richtung nach der Verticale AO′, trage in O′ einen rechten Winkel an a′O′, wodurch sich der Verschwindungspunct b′ ergibt. Die Richtung b′b schneidet die a′a in d und bildet daselbst einen rechten Winkel adb, ebenso entsteht ein solcher in c. Man ziehe ae und bf parallel der Grundlinie, dann die Gesichtslinien aA und bA, um wieder zwei rechte Winkel in f und e zu erhalten. Wünscht man unterhalb außer d noch mehrere Puncte zu erhalten, so kann man eine zweite Secante a²a″

legen, mit a^2O' den Verschwindungspunct für 90° suchen und daraus Peripheriewinkel auf ab construiren.

105. — **Aufgabe.** Soll der Kreis nach Maßbestimmungen gezeichnet werden (Fig. 73), und ist gegeben die perspectivische Projection des Mittelpunctes, der Durchmesser gleich 6 Fuß, der Abstand der Verticale vom Mittelpunct gleich 5 Fuß und ebensoweit der Abstand der Grundlinie: so ziehe man die Gesichtslinie Ao bis zur Grundlinie in o', theile A'o' in 5 gleiche Theile, welches Fußeinheiten des beziehlichen Maßes sind, trage nach jeder Seite von o' drei solcher Einheiten nach b' und c' und ziehe b'A, c'A; die Theillinie D'o bestimmt dann die Ecken des umschriebenen Quadrats.

Will man den Kreis mit Hülfe eines eingeschriebenen Achtecks zeichnen, (dessen Seiten mit den des Quadrats Winkel von $22\frac{1}{2}°$ bilden), so hat man in O' diesen Winkel an die Verticale anzutragen und die Verschwindungspuncte h' und k' abzuschneiden. Durch die Theillinien h'b, h'c, k'b und k'c werden auf den Diagonalen des Quadrats die Ecken hkil des Achtecks geschnitten, dessen übrige Ecken in b,c,f,g liegen, und der Kreis kann nun ausgeführt werden.

106. — **Aufgabe.** Einen Kreis in ein umschriebenes Achteck zu zeichnen, wobei die Seiten Tangenten des Kreises sind (Fig. 74).

Es sei in der Bildebene der Durchmesser mn des Kreises parallel der Grundlinie gegeben. Die Endpuncte dieses Durchmessers liegen, nebst denen des senkrechten Durchmessers, in der Mitte von Seiten eines Achtecks, welche mit den Durchmessern mn und cs parallel laufen. Das Achteck selbst kann aber in ein Quadrat eingeschrieben werden, dessen

Seite gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Man construire also zuerst dieses Quadrat nach § 90, ziehe durch den Mittelpunct o noch die Gesichtslinie Ac und bilde ein rechtwinkliges, gleichschenkliches Dreieck ac,c', in welchem die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gleich a'c, ist.*) Die gefundenen Puncte a, b geben die Größe der Achtecksseite auf a'b'; zieht man aus ihnen Gesichtslinien, schneidet diese durch die Diagonalen, und legt durch die Durchschnittspuncte Parallelen mit der Grundlinie, nemlich qe, sn', rd und lf', so sind sämmtliche Eckpuncte des Achtecks bestimmt, dabei aber durch die Constructionslinien zugleich die Puncte, wo der Kreis die Seiten berührt, und man kann diesen ohne Schwierigkeit einzeichnen.

Ist nicht der Durchmesser des Kreises, sondern die Seite ab des Achtecks auf der Bildebene gegeben, und dieses zu construiren und der Kreis einzuzeichnen, dann wird die Lösung etwas einfacher.

Man verlängert ab zu beiden Seiten, errichtet in der Mitte c, eine Normale gleich $\frac{1}{2}$ ab, zieht die Hypotenuse ac' und trägt sie in aa' und bb'; a'b' ist dann die Seite des umschriebenen Quadrats, das übrige Verfahren aber wie zuvor.

107. — **Aufgabe.** Der senkrechte Kreis von dem Halbmesser a'b', in einer Ebene liegend, die normal der Bild- und Grundebene ist, soll gezeichnet werden (Fig. 75).

---

*) Diese Aufgabe wird gelöst, wenn man Fig. 74a ein gleichschenkliches, rechtwinkliches Dreieck construirt, dessen Katheten gleich a'c, Fig. 74, die Hypotenuse durch cv halbirt, cv ebenfalls gleich a'c, macht und mit dem Radius va, den Bogen a'ac'c'' beschreibt. Dieser schneidet die Ecken a und c' des verlangten Dreiecks ab.

Man beschreibe mit ia' den Viertelkreis $a^2i^2h^2$, halbire ihn in e^2 und ziehe l^2e^2, m^2e^2. Den Theil a^2l^2 trage man in a'l' und b'm', ziehe durch die, auf dem Durchmesser bestimmten Puncte Gesichtslinien in nöthiger Verlängerung, dann O'a', O'i', O'b', wodurch sowohl ein eingeschriebenes Quadrat, als auch mit dessen Hülfe 8 Puncte des Kreises erhalten werden.

Es kann verlangt werden: daß aus diesem Kreise ein gleich großer auf der Grundebene abgeleitet werde. Man hat dann aus den für den normalen Kreis gefundenen Puncten Ordinaten auf den Grundschnitt h^oF^o zu fällen, aus den Fußpuncten h^o, d^o, b^o... die Coordinaten parallel der Grundlinie zu ziehen, auf ab, gleich a'b', den Mittelpunct zu bestimmen und mittelst des umschriebenen Quadrats und dessen Diagonalen die Puncte des Kreises zu schneiden, wie die Figur zeigt.

108. — **Aufgabe.** Eine senkrechte Ebene ist unter einem Neigungswinkel von 70° gegen die Bildebene gestellt, man soll einen Kreis auf derselben projiciren (Fig. 76).

Es sei e' der Durchgangspunct des Grundschnittes durch die Bildebene, t deren Verschwindungspunct im 70° des Horizonts und t' der zugehörige Theilpunct, so daß tt' = tO'. Der Abstand des Punctes e' von der Verticale ist 5 Fuß, der Durchmesser des Kreises 6 Fuß und der normale Durchmesser eu von dem Durchgangspunct e' oder dem Verticalschnitt e'h 4 Fuß gesetzt.

Man projicire den Punct e, indem man aus der vierten Fußeinheit e'' die Theillinie e''t' zieht, welche den Grundschnitt in dem verlangten Punct e schneidet; aus der siebenten Fußeinheit g' und der ersten f' gleiche Linien gezogen, erhält man in d und g die Seite des Quadrats, gleich 6 Fuß in

welches der Kreis eingeschrieben wird. Die Höhe e'h, ebenfalls 6 Fuß gemacht und die Gesichtslinie ht gezogen, bestimmt auf den Normalen dk und gi die andern Ecken des Quadrats dgik.

Zu der Projicirung des Kreises suche man entweder die Puncte l,m, oder x,y durch Construction nach § 101, oder nehme hl gleich $\frac{3}{10}$ ho' und verfahre dann weiter wie bekannt.

109. — **Aufgabe.** **Man soll einen Kreis, dessen Bild in efgh gegeben ist, in eine Anzahl gleicher Theile theilen (Fig. 77).**

Man umschreibe das perspectivische Quadrat abcd, stelle auf cd einen Halbkreis und theile die Peripherie wie verlangt, hier in zwölf Theile, wodurch auf dem Halbkreis die 6 Theilpuncte i,k,l... entstanden sind. Man ziehe aus denselben Ordinaten und aus den Anfangspuncten auf cd Gesichtslinien, so schneiden diese die Kreislinie perspectivisch in die verlangten gleichen Theile.

110. — **Aufgabe.** **In einen gegebenen Kreis abfi einen andern concentrisch zu zeichnen.**

Man nehme aa' = bb' gleich dem Abstand, welchen die Kreise haben sollen, ziehe irgend einen Radius oc (Fig. 78), suche den Verschwindungspunct c'' für ac und noch c''a'. Letztere schneidet, verlängert den Radius oc in c', welches ein Punct des concentrischen Kreises ist. Ebenso verfahre man mit andern Radien, z. B. eo, wofür man den Verschwindungspunct e'' und den Punct e' des innern Kreises erhält. Im Allgemeinen bemerke man, daß stets die Abstandspuncte aa' oder bb' auf dem Durchmesser benutzt werden müssen und daß jeder Radius einen andern Verschwindungspunct mit sich bringt. Jemehr man Radien legt, desto genauer wird der concentrische Kreis erlangt.

111. — **Aufgabe.** Man soll ein reguläres Sechseck construiren, dessen Diagonale senkrecht der Grundlinie steht (Fig. 79).

Die Eigenschaft des Sechsecks, daß die Ordinaten aus den Ecken auf die Diagonale gleiche Abscissen haben, macht die perspectivische Zeichnung in der bedingten Lage sehr einfach.

Man nehme $b^o f^o$ gleich dem Abstand zweier gegenliegenden Seiten und ziehe aus b^o,f^o und der Mitte a Gesichtslinien. Hierauf trage man auf die Grundlinie von f^o ab die halbe Seite des Sechsecks viermal auf und schneide die Gesichtslinie $f^o A$ durch Theillinien aus diesen Puncten in f'e' und g'. Mittelst der Parallelen b'f', e'c' und g'd' ergeben sich die Ecken des Sechsecks.

112. — **Aufgabe.** Ein reguläres Sechseck zu construiren, wenn dessen Diagonale geneigt gegen die Grundlinie ist.

Hier ist am besten das Verfahren § 31 anzuwenden, wonach jeder bestimmende Punct einzeln in Perspective gelegt wird (Fig. 80). Die Operation ist schon in mehrern Fällen ausgeführt worden, daher unnöthig, sie nochmals ins Detail zu verfolgen. Es kann dabei die ganze Distanz oder sonst ein bequemer Bruchtheil derselben benutzt werden.

113. — Anmerkung. Dieses allgemeine Verfahren, das perspectivische Bild eines Punctes zu bestimmen, findet immer Anwendung, wenn die Figuren unregelmäßig gebildet sind, bei krummen Linien, u. a. und kann als specifisches Hülfsmittel in Verlegenheiten betrachtet werden, welche sich zuweilen selbst dem geübten Zeichner bieten. Man lasse sich jedoch nicht verleiten, diese Construction aus dem Grundriß in allen Fällen oder doch vorzugs-

weise zu gebrauchen, und sich zu sehr an sie zu gewöhnen. Die Unentbehrlichkeit des Grundrisses führt nur zu oft zu Collisionen mit dem disponibeln Raum der Zeichnenebene und verläßt den Zeichner in den schwierigsten Fällen.

114. — **Aufgabe.** Eine unregelmäßige Figur, z. B. eine architectonische Verzierung perspectivisch zu zeichnen.

Das Copiren einer Zeichnung durch Quadrate ist jedem Zeichner bekannt. Die Ausführung einer solchen perspectivischen Zeichnung geschieht auf dieselbe Weise, nur muß, wie leicht ersichtlich (Fig. 81), das Quadrat, welches man als Netz über das Urbild legt, auf der Copie perspectivisch construirt werden. Die Figur gibt ein deutliches Beispiel, welches noch dahin erweitert werden kann, daß die Copie eben so verkleinert (oder vergrößert), horizontal oder senkrecht, oder auf abweichenden Ebenen abgebildet werden kann. Die Verschiebung, je nach der Lage des Augenpunctes oder der Distanz, ergibt sich natürlich von selbst.

115. — **Aufgabe.** Der Bogen mAn auf einer mit der Bildebene parallelen Ebene soll auf die beiden abweichenden Ebenen ae und bg projicirt werden.

Man theile den gegebenen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Theile 1,2,3,4...., deren einer in dem Scheitel liegt (Fig. 82), und ziehe durch die Theilpuncte Parallelen mit der Grundlinie bis an die Schnitte ef und gh, welche die Ebenen paarweise gemein haben. Hierauf suche man die Verschwindungspuncte der Grundschnitte bh und af, welche in t und t' fallen, und trage die Parallelen in diesen Puncten convergirend auf beide abweichende Ebenen über, wie die Figur zeigt. Man ziehe dann

aus den Theilpuncten des gegebenen Bogens Ordinaten auf fh und von deren Anfangspuncten die Coordinaten nach der Grundlinie ab, welche nothwendig auf den Gesichtslinien nach A liegen. Zieht man hierauf die Diagonale ah und durch die Durchschnitte mit den Gesichtslinien Parallelen nach den Grundschnitten af und bh, so geben diese eben so viel Anfangspuncte senkrechter Ordinaten, und letztere mit den erstgezogenen perspectivischen Parallelen, Durchschnitte, welche Puncte der verlangten Bögen sind. Dasselbe würde sich durch die Diagonale bf gestaltet haben und auf gleiche Weise könnte der Bogen auf jede beliebig abweichende Fläche, selbst auf eine solche übergetragen werden, die hinter der Ebene efgh liegt.*)

Vierter Abschnitt.

Perspectivische Projection von Körpern.

116. — Dem denkenden Zeichner kann es nicht schwer werden, die bisher vorgetragenen Sätze von Puncten, Linien und Winkeln auf irgend eine körperliche Form anzuwenden.

Indessen finden sich doch so manche Fälle beim practischen Zeichnen vor, die in Verlegenheit setzen können, sowohl über die Construction selbst, als auch über die Wahl derjenigen Mittel, die am kürzesten zum Ziele führen. Auch ist es nicht möglich, alle

*) Diese Aufgabe kommt in architectonischen Zeichnungen häufig in Anwendung, sie kann bei kleinern Bögen vereinfacht werden, daß man nur die Puncte auf dem gegebenen Kreis annimmt, welche nach § 101 zur Construction des perspectivischen Kreises unentbehrlich sind. Bei allen größern Kreisbögen, gedrückten, überhöheten Spitzbögen etc. aber muß man sich an die hier beschriebene Methode halten.

Fälle zu erschöpfen, und es werden sich deren immer einstellen, die das Nachdenken, eine gewisse Erkenntniß von Analogien und eine gute Combinationsgabe in Anspruch nehmen.

Am meisten finden sich solche beim Zeichnen von plastischen Gegenständen, weniger bei Flächen; wenn aber alle unmittelbare Regeln versagen und sich dem Gegenstand nicht anpassen wollen, so bleibt doch die: man passe den Gegenstand in die Regel.

Wie der Bildhauer sein Modell in die Mensur, stelle der Zeichner das seinige in eine regelrechte Figur, und construire erstere, indem er Bezug auf die letztere nimmt. Den wesentlichsten Nutzen hierbei leistet der Würfel.

117. — Im Allgemeinen erinnere man sich bei Körpern, wie bei Flächen und Linien, daß

a) die graphische Bestimmung des Körpers von der Aufsuchung der Grenzlinien, diese aber von der Feststellung der Richtpuncte (Endpuncte) abhängt, daß also die Zeichnung des Körpers nach Auffindung dieser Puncte im Wesentlichen ausgeführt ist.

b) Parallele Linien eines Körpers, mögen sie in irgend einer zufälligen Ebene liegen, haben stets denselben Verschwindungspunct, selbst wenn sie geometrisch parallel laufen, hat dieser Satz Gültigkeit; der hypothetische Verschwindungspunct liegt dann in unendlicher Ferne.

c) Der Augenpunct, der Horizont, die Distanzpuncte ꝛc. sind eben so unentbehrliche Voraussetzungen beim perspectivischen Zeichnen von Körpern, wie bei dem von Linien und Flächen; denn um den Körper darzustellen, zeichnen wir Flächen.

118. — Wie bereits erwähnt, ist der Würfel der nützlichste, einfachste und zugleich lehrreichste unter den Körpern.

Man soll einen dergleichen zeichnen, welcher mit der Tafel parallele Ebenen hat (Fig. 83).

Wir nehmen ihn in verschiedenen Stellungen **I, II, III, IV** gegen den Augenpunct an; **I** und **II** befinden sich unterhalb, **III** und **IV** oberhalb des Horizonts; von den beiden erstern sehen wir die obern Grundflächen, von den letztern die untern; bei allen aber ist die Construction dieselbe. Sobald einer der Eckpuncte einer Grundfläche und die Länge einer Seite bestimmt ist, zeichne man nach § 91 u. f. das Quadrat dieser Fläche perspectivisch, indem man den Augenpunct **A** und den Distanzpunct **D** benutzt, ziehe aus den Eckpuncten Senkrechte, mache **ae** gleich **ab**, gleich **bf**, ziehe aus **e** und **f** Gesichtslinien und bilde an **ef** das Quadrat der andern Grundfläche; die Verbindung der Ecken durch Kantenlinien ergänzt das perspectivische Bild des Würfels.

119. — **Aufgabe.** (Fig. 83) Der Würfel stehe mit einer Kante auf der Grundlinie in **n**, die anstoßenden Seiten weichen aber von der Grundlinie der Tafel um α^0 ab. Man trage den Abweichungswinkel α in **TO't** oder, was gleichviel, dessen Complement **R** — α in **AO'T**, um den Verschwindungspunct **T** für die Seiten **no** und **mp** zu erhalten; und da der Winkel **onm** ein Rechter, so setze man an **TO'** den rechten Winkel **TO'T'**, wodurch der Verschwindungspunct **T'** für die andern Seiten gefunden wird. Man bestimme die Länge von **no** gleich **nq**, vollende die Quadrate der beiden Grundflächen und ziehe die Kantenlinien.

120. — **Aufgabe.** Der Würfel stehe auf der Ecke **b**, so, daß **b,b'** die senkrechte Axenlinie bilde.

Hierzu sind einige Vorbereitungen nöthig. Man construire Fig. 84a ein rechtwinkliges Dreieck mno, dessen Katheten der Würfelkante gleich sind; die Hypotenuse no ist die Diagonale einer Würfelseite. In Fig. 84b ziehe man b,b' senkrecht und bestimme diese Axe, indem man sie zur Hypotenuse eines Dreiecks b,a'b' macht, dessen Katheten die Würfelkante mn gleich a'b' und die gefundene Linie no, gleich b,a' sind.

Dasselbe Dreieck legt man in b,c,,b' und erhält dadurch das Rechteck a'b'c,,b,, welches die orthographische Projection des Würfels in der verlangten Stellung ist. Zieht man noch a'd, und a,,c,, und verbindet a,,d, so ist diese Linie die Projection der Kante, in welcher die beiden Würfelseiten zusammenstoßen.

Von dieser Projection suche man den orthographischen, und aus diesem Fig. 84 den perspectivischen Grundriß ada,ec,e, nebst dem Fußpunct b, der Axe, wobei ad gleich mn, gleich der gegebenen Quadratseite ist.

Errichtet man nun in den Eckpuncten und der Axe Normalen, macht diese dem Abstand von der Grundebene perspectivisch gleich, so ergeben sich die Eckpuncte, welche durch Kantenlinien zu verbinden sind.

Zu diesem Zweck zieht man auf der verlängerten ad eine Senkrechte or, gleich der in b,b' gefundenen Axe, in Fig. 84b aber Normalen aus den Ecken a,,d,c,, auf die Projection ac der Grundebene, wodurch man den geometrischen Abstand dieser Ecken von letzterer erhält. Diese Höhen trägt man in op gleich aa,, und oq gleich dd,, zieht aus o,p,q und r Linien nach A (oder nach einen andern beliebigen Punct des Horizonts), sucht dann nach § 70 die perspectivischen Höhen über den einzelnen

Eckpuncten des Grundrisses a,a', aa,,, ee', b,b' ꝛc., so sind die Ecken des Körpers bestimmt und die perspectivische Projection kann durch Ziehen der sichtbaren Kanten vollendet werden.

Man würde die Aufgabe auch mit Hülfe der Sätze über schiefe Ebenen lösen können, doch dadurch die Operation verwickelter machen.

121. — **Aufgabe.** Man soll die Parallelepipeden A,B,C,D,E, deren Maße gegeben sind, in paralleler Lage mit der Tafel zeichnen (Fig. 85).

Die Grundlinie, auf welcher die verjüngten, geometrischen Maße Geltung haben, ist xy und die Körper A,B,D haben auf ihr die gemessene Stellung, der Körper E hingegen liegt weiter von der Tafel ab.

Man errichte die Rechtecke der Seiten von A,B,D und gebe ihnen die beigeschriebenen Maße, aus den Ecken ziehe man Gesichtslinien nach dem Augenpuncte. Da nun die zurückweichende Kante von A 2 Fuß groß sein soll, so schneide man sie mit dieser Länge der Grundlinie aus m durch mD und ergänze den Körper. B ergibt sich einfach durch Horizontale aus den Ecken von A; D wird mit 9 Fuß durch die Theillinie geschnitten. Da dieses aber durch den andern Distanzpunct geschehen müßte, den der Raum nicht zuläßt, so ziehe man eine beliebige Gesichtslinie z. B. n'A, schneide diese durch o'D und ziehe eine Horizontale durch den Durchschnitt, welche die Gesichtslinie yA in der verlangten Länge schneiden wird. Die Vorderebene von C liegt in einer Flucht mit den Vorderseiten von A und B, die Längenmaße in dieser Ebene sind daher dieselben geometrischen; die Grundlinie pm von E dagegen liegt von der Hauptgrundlinie zurück, deren Maß xy muß daher durch die Gesichtslinien xA und yA abgeschnitten werden; die Höhe von 2 Fuß

trage man auf die Senkrechte yy' und ziehe y'A, wodurch mn gleich 2 Fuß wird.

122. — **Aufgabe.** Auf das Parallelepipedon A (Fig. 86) legen sich aus den Puncten c und c' zwei andere B und C parallel mit der Tafel; man soll die Anlehnungspuncte der Kanten cd und c'd' und damit die Lage der Balken B und C finden.

Da das Dreieck abc rechtwinklich und ac parallel der Grundlinie sein muß, so ziehe man die Horizontale ac bis an die Kante in a des Körpers A, errichte in a eine Normale, so erhält man in dem Durchschnitt b den Punct, wo den Bedingungen nach die Kante cd auf der von A aufliegen muß, und zugleich die Richtung derselben; eben so verhält es sich bei C. Die Zeichnung der Parallelepipeden hat keine Schwierigkeiten, wenn die Längen, Höhen und Breiten bekannt sind, indem die Höhenkanten senkrecht auf den untern Kanten stehen, ohne eine andere perspectivische Richtung anzunehmen, und die Breitenkanten in dem Augenpunct auslaufen.

123. — **Aufgabe.** Auf ein wagerechtes, 30 Fuß langes Parallelepiped A, welches 8 Fuß breit und 4 Fuß hoch ist, sollen zwei andere B und C, die 12 Fuß lang, 4 Fuß breit und 4 Fuß hoch sind, dergestalt gelegt werden, daß sie gegen die Grundebene 38° geneigt sind.

Das eine B derselben soll 4 Fuß vom Ende des großen, das andere C 10 Fuß von demselben Ende aufliegen. Die Eintheilung des Fußbodens in Platten kann hier als Maßstab von zweifüßigen Einheiten benutzt werden. Uebrigens liegt der Körper A 10 Fuß von der Tafel ab und sämmtlich sind sie rechtwinklich gekürzt.

Nachdem der Körper A nach den gegebenen Maßen gezeichnet worden, wozu die zuvor bewirkte Eintheilung des Plattenbelegs nützlich sein kann, nehme man FL der Kante gleich 4 Fuß, ziehe die Gesichtslinie LA bis zur Grundlinie in b und in diesem Durchschnittspunct auf BC eine Senkrechte bc, so ist Ab die Grundlinie einer Verticalebene, in welche die eine Seitenfläche des Körpers B fällt, und bc ist die Durchgangslinie dieser Ebene mit der Tafel; auf sie können die geometrischen Höhenmaße gesetzt werden. AO' gibt die Grenzlinie zu der Gradtheilung der Verticalfläche, deren Hauptpunct mit dem Augenpunct zusammenfällt. Die Gradtheilung geschieht von dem Punct D aus, welcher Hülfspunct für die Verticalebene wird. In ihn hat man die nöthigen Winkel von 38° und das Complement 52° zu tragen und auf AO' zu beiden Seiten des Augenpunctes abzuschneiden.

Man ziehe LM normal LF und aus dem Durchschnitt M der Kante eine Richtung eM nach dem Punct 38°, die LA in d schneidet, wodurch der Winkel MdL gleich 38° wird und dM die Richtung der Kante von B gibt. Der Endpunct e dieser Kante wird mittelst des Theilungspunctes t*) bestimmt, indem man de mit 12 Fuß des Maßstabes auf bc, wie bekannt, abschneidet. Man ziehe dd' parallel der Grundlinie und schneide 4 Fuß durch die Gesichtslinien 2'A und 6'A, ziehe die Richtungen e'd' nach 38° und ee' parallel d'd, so ist dd' ee' die untere Fläche von B, welche die Kante J'M von A in M berührt. Aus den Ecken dieser Fläche ziehe man die Höhenkanten nach 52° der Gradtheilung und schneide sie in der Länge von 4 Fuß mittelst des Theilpunctes t', welcher zu der

*) Es ist nemlich Ot gleich OD zu machen.

Linie e 52° gehört, und kann nun das Parallelepipedum B leicht ergänzen. Auf dieselbe Weise operirt man, um das C′ zu zeichnen, indem man damit beginnt, K′R (gleich K′N) durch das Maß Cb′ gleich 10 Fuß zu machen und die Kante nh in der Richtung R 38° zu ziehen; wo diese Richtung die Gesichtslinie b′N in h schneidet, trifft nh die Grundebene, und eine Horizontale hh′, die man 4 Fuß macht, gibt eine zweite Kante. Wie Kl oder l′H in der Länge von 8 Fuß zu schneiden ist, wird genügend aus dem Obigen zu ersehen sein.

124. — **Aufgabe.** Mit Beibehaltung der Maßbestimmungen in der vorigen Figur (Figur 88), ändert sich die Aufgabe dahin, daß der Körper A gegen die Grundlinie BC um 30° abweicht.

Man setze in O′ den Neigungswinkel von 30°, und schneide durch dessen Schenkel den Horizont. Der Theilungspunct für diese Richtung ist t und alle Normalen auf ihr laufen in dem 60° bei a aus, weil a′Oa ein rechter Winkel ist.

Ist der Punct bestimmt, so zieht man H 30° gibt dieser Richtung die vorgeschriebene Länge, zeichnet die Grundfläche HFK, errichtet in deren Eckpuncten Normalen, die 4 Fuß lang zu machen sind, und vollendet das Parallelepipedon A. Von F nach L schneidet man 4 Fuß und zieht die Richtung aLb und durch a und b die Normalen ar und bc, so kann man a als Hauptpunct, ab als Durchschnittslinie (mit der Grundebene), bc als Durchgangslinie (mit der Tafel), ar als Grenzlinie einer Verticalebene betrachten, in welcher die Seitenebene gefd liegen muß. In L setze man die Normale LM, welche die Kante I′M in M schneidet, und ziehe aus 35° bei r die Richtung rM, in der die Kante de liegt, weil der Winkel LdM gleich 35°.

Nun ziehe man ba, welche rM in d schneiden und diesen Punct bestimmen wird; ziehe dd' nach a' und schneide sie 4 Fuß lang. Hat man noch d'e' in der Richtung von rd' gezogen, de mittelst des Theilpunctes t', der zu dieser Richtung gehört, gleich 12 Fuß gemacht, so bleibt nur übrig, die untere Grundfläche zu ergänzen.

Der Verschwindungspunct für die Höhenkanten liegt 55° von a ab (als Complement von 35°); nach ihm richte man die Linien eg, e'g', df.... und schneide df mittelst des Theilpunctes t'' der Linie du zu 4 Fuß Länge. Indem nun ee', gg' in a' verschwinden, steht der Ergänzung des Körpers B keine Schwierigkeit mehr entgegen.

Bei der Projection von C bestimme man den Punct h und ziehe die Linie h 35°; die Höhenkanten nehmen die Richtung nach 55° der Grenzlinie ar, die anstoßenden nach 30° des Horizonts; die Theilungen geschehen durch die den Richtungen zukommenden Theilpuncte t^3 und t^4.

125. — **Aufgabe.** Es soll ein senkrechtes, rechtwinklich geschnittenes Prisma, dessen Horizontalprojection in a,b,c....g perspectivisch, die Höhe in gg' gegeben ist, gezeichnet werden (Fig. 89).

Die Ausführung geschieht am einfachsten mittelst des Höhenmaßstabes. Man ziehe die Horizontalen gg, und g'g'' und aus g'' und g, die Linien g''m und g,m nach einem beliebigen Punct m des Horizonts, wodurch der Maßstab hergestellt ist. Legt man nun ff, parallel gg, , errichtet die Normale F,F'' und trägt dieses Maß in ff' über, so ist die Höhe dieser Kante bestimmt. Zieht man cc, horizontal, c,c'' senkrecht und trägt c,c'' in cc' über, so hat man das Maß der Kante über dem Eckpunct c ꝛc. Sind nach dieser Weise alle Kanten ihrer Höhe

nach bestimmt, so hat man nur noch die obern Endpuncte zur Grundfläche zu verbinden, welches hier unterlassen ist, um der Uebersicht keinen Eintrag zu thun. Wir haben dieses Verfahren, welches in vielen Fällen sehr nützlich ist, bereits in Fig. 84 angewandt. Es ist vorzüglich da mit Vortheil anzuwenden, wo der perspectivische Grundriß benutzt werden kann, dieser eine unregelmäßige Figur ist und mehrere Höhen von gleichem Maße abzuschneiden sind.

Man würde dasselbe, wiewohl auf Umweg, erhalten, wenn man von einer oder zwei bestimmten Höhen aus die obere Grundfläche mittelst der Verschwindungspuncte der untern Seiten construirte.

Steht das Prisma zwar auf der Grund- oder einer Horizontalebene mit seiner Grundfläche, sind aber die Höhenkanten geneigt gegen dieselbe, dann ist dies Verfahren zwar ebenfalls anwendbar, man hat es aber nicht mit den Kanten selbst, sondern mit den Senkrechten aus den Ecken zu thun, die ebenfalls von gleicher Höhe sein müssen, wenn das Prisma parallel geschnitten ist. Deren Grundpuncte liegen stets auf der Horizontalen, die von dem beziehlichen Eckpunct der Grundfläche ausgeht. Man ziehe die Höhenkanten parallel, suche die zu jedem Eckpunct gehörige perspectivische Höhe und schneide aus ihr die Höhenkante durch eine Horizontale aus dem gefundenen Höhenpuncte, wie vorher beschrieben.

126. — **Aufgabe.** Es ist das auf einem Würfel parallel der Tafel stehende Kreuz perspectivisch zu zeichnen.

Wir wollen hier eine Methode einführen (Fig. 90), die oft, namentlich bei architectonischen Gegenständen großen Vorzug hat, nemlich die des mittlen geometrischen Durchschnitts.

Man zeichnet den mittlen Durchschnitt in geometrischen Maßen, oder die orthographische zweite

Projection des gegebenen Gegenstandes, welcher hier die Linie ab zur Grundlinie hat und wobei i der Punct der senkrechten Axe ist, wo diese die Grundebene in der perspectivischen Zeichnung trifft. Der Durchschnitt des Würfels ist das Quadrat abcd. In mn steht der Fuß des Kreuzes, dessen Durchschnitt in mnspq...m ebenfalls geometrisch entworfen ist. Durch die genannten Eckpuncte ziehe man Gesichtslinien nach dem Augenpunct A, die man über die Eckpuncte vorwärts verlängert, durch die Mitte i die Theillinie Di, wodurch sich das Quadrat a'b'a''b'' der untern Grundfläche ergibt. Man ziehe die Höhenkanten, durch die obere Mitte der Würfelseite eine Theillinie, und kann nun den Würfel vollenden.

Auf gleiche Weise findet man die obere und untere Grundfläche des Stammes, dessen Axe i'i'' ist, und den Stamm selbst. Die Durchschnitte rs, vt der Arme mit dem Stamme in dem geometrischen Durchschnitte geben durch die Puncte, welche durch die Schnitte der Gesichtslinien sA, rA ꝛc. entstehen, wo sie die Kanten des Stammes schneiden, die Arme im perspectivischen Bilde. Zieht man nemlich durch diese Puncte Parallelen mit der Grundlinie, sucht die beiden quadratischen Stirnflächen auf die beschriebene Weise mittelst der Puncte des geometrischen Durchschnitts, so ist das Kreuz gezeichnet.

127. — **Aufgabe.** Dasselbe Kreuz nebst der Plinte ist um seine Axe so gedreht (Fig. 91), daß die Grundlinie a'a'' des Würfels auf der Grundebene in t' ihren Verschwindungspunct erhält.

Da O' der Hülfspunct, t'Ot ein Rechter, so ist t Verschwindungspunct für die anliegenden Seiten, und die Halbirungslinie des Winkels tOt' schneidet in t'' den Theilpunct oder den Verschwin-

dungspunct für die Diagonale der gleichliegenden Quadrate auf dem Horizont ab.

Will man sich hier des geometrischen Durchschnitts bedienen, wie er in der vorigen Figur gezeichnet ist, so hat man ihn vor Allem perspectivisch darzustellen, wie er nach der Drehung erscheint. Man kommt zwar bei dieser Aufgabe leichter zum Ziel, wenn man das Kreuz mit seinem Untersatz unmittelbar projicirt, wir wollen jedoch auch hier die Methode beibehalten, weil sie bei architectonischen Gesimsen auf ähnliche Weise gebraucht wird. Mit Hülfe der obengenannten Puncte construire man nun zuerst das untere Quadrat a'a''b''b' des Würfels perspectivisch und suche dessen Mittellinien op und w,w', die durch den Durchschnittspunct i' der Diagonalen gehen. In dessen Mitte lege man das Quadrat der Grundfläche des Stammes und, zu mehrer Erleichterung, die Horizontalprojection des Arms auf die Grundebene in perspectivischer Lage.

Man ist nun in den Stand gesetzt, den mittlen Durchschnitt perspectivisch zu zeichnen. Für den Würfel ist er das Quadrat opqr, der Durchschnitt des Stammes ist sty'z' und der des Arms wxyz. Aus diesem Durchschnitt ist die Figur des Würfels und des Kreuzes nach dem vorigen § leicht abzuleiten, indem wir uns anstatt des Augenpunctes und der Distanz der Puncte t, t' und t'' bedienen, und durch Richtlinien durch die Eckpuncte des Durchschnittes die aus dem Grundriß gezogenen Senkrechten schneiden.

Wenn sonach der perspectivische Grundriß und mittle Durchschnitt gefunden worden, ist die Operation sehr einfach und das bisher Vorgetragene reicht aus, jene zu finden. Wir wollen daher hier nur die Bildung einer Fläche m'n'w'x' des Stammes erwähnen.

Da s der Punct des mittlen Durchschnitts auf der Oberfläche des Würfels ist, so ziehe man die Richtlinie ts und schneide sie senkrecht aus den Puncten mu; die Verlängerung der Senkrechten gibt zugleich die begrenzenden Höhenkanten, deren Länge durch die Richtlinie tz abgeschnitten wird. Um die Durchgangspuncte des Arms zu finden, zieht man aus den Puncten des mittlen Durchschnitts u und v Richtlinien nach t', so bilden diese mit denen nach t rechte Winkel und schneiden auf der Kante m'w' die Durchgangspuncte u'v'; durch diese Richtlinien, nach t gezogen, erhält man die Richtungen der Kantenlinien des Arms, deren Länge aus den Grundpuncten hg... wieder durch Senkrechte abgeschnitten wird 2c.

Hat man die horizontale Projection des Gegenstands nicht neben der des mittlen Durchschnitts, so nimmt man seine Zuflucht zu Bildung von Quadraten mittelst des Theilpunctes t''.

128. — **Aufgabe**. Das Kreuz ist gegen die Grundebene geneigt und die Fläche aa'f' liegt parallel der Tafel (Fig. 92).

Es sind daher alle Kanten, welche mit dieser Ebene parallel liegen, geometrisch parallel, und alle zu ihr senkrecht stehenden Horizontalen haben den Verschwindungspunct in dem Augenpunct. Die Höhenkanten sind geometrisch normal der Linie a'f'.

Die Lage des Kreuzes ist zu einfach, als daß aus Benutzung des mittlen Durchschnitts Vortheil zu ziehen wäre. Da sich ab von der Grundlinie am aufwärts in senkrechter Ebene bewegt hat, so ist ab geometrisch parallel am und wir brauchen nur den Erhebungswinkel α in bam zu tragen, um die Lage des Stammes zu erhalten.

Auf den Schenkel af des Winkels tragen wir von a aus die gegebene Länge in F und auf die

gezogene Normale aa' die Dicke des Stammes, ziehen die Parallele a'f', so ist eine Seite des Stammes construirt. Da das obere Ende desselben ein Würfel ist, so ist e'f' gleich FF' und, bei gleicher Dicke des Arms, auch gleich b'e'. Aus a,a',b',e',f' werden nun Gesichtslinien nach A gezogen; da aber, wie bekannt, dergleichen Linien stets den Distanzpunct zum Theilpunct haben, so braucht hier nur auf die Regeln verwiesen zu werden, welche das Schneiden derselben nach bestimmten Maßen bewirken, um mit der Vollendung des Kreuzes zu schließen.

Man würde die Construction des perspectivischen Bildes auch auf die Entwerfung des horizontalen Grundrisses begründen können. Die Operation wird auch nicht umständlicher und überdem eine sichere Controle geben.

129. – **Aufgabe.** Die übereinandergestellten Parallelepipeden (Fig. 93) dieser Figur bilden eine so sehr einfache Zusammenstellung, daß deren perspectivische Zeichnung am kürzesten durch die Horizontale, in Perspective gelegte Projection geschehen wird.

Die senkrechten parallelepipeden Körper liegen in gleichen senkrechten Ebenen übereinander, und zwar über den Linien bcde des Grundrisses; deren vordere Enden schneiden mit einer der Tafel parallelen Ebene ab, deren Grundlinie b'b, ist, die hintere, die Länge bestimmende Ebene steht auf a'a,. Die Körper, welche parallel der Tafel dazwischen liegen, bilden ebenfalls senkrechte Ebenen, deren vordere auf mm', die hintere auf pp, steht, und werden ihrer Länge nach durch die Ebenen auf aa' und on' begrenzt. Das geometrische Maß auf der Grundlinie der Tafel ao ist auf der Normalen o6 aufgetragen und wird von da aus durch die Augenlinien 1A... 6A, je nach dem Zurückweichen der verschiedenen

Ebenen, verjüngt. Nach dem Augenpunct A müssen nothwendig auch die Kanten laufen, die senkrecht auf die Tafel stehen. Senkrechte aus den beziehlichen Puncten des Grundrisses bestimmen die Höhenkanten.

130. — **Aufgabe.** Die cassettirte Decke soll in Perspective gesetzt werden.

Es ist hierbei angenommen, daß der Augenpunct in den Flächenwinkel qA falle, wodurch die Distanzpuncte DD' die Verschwindungspuncte der sich rechtwinklich schneidenden Linien werden.

Construirt man ein rechtwinklich gleichschenkliges Dreieck a'c g, worin a'c' die Diagonale einer Cassette ist, zieht ch und ah in einem normalen Abstand, welcher gleich der Breite der Balken, so erhält man auf dem Durchschnitt MN der horizontalen Decke mit der Tafel (der Grundlinie) die aufzutragenden Maße. Man trägt nemlich cc' so oft auf, als es die Länge der Decke verlangt, und setzt in jedem Theil ca' einfach ab. Die Normalen ab, cd bestimmen die Tiefe der Cassetten.

Nach dieser Vorbereitung ist man vollkommen in Stand gesetzt die Decke zu zeichnen. Die Linien aus den Puncten a,c,a,c.... nach D und D' geben die perspectivische rechtwinkliche Kreuzung der untern Balkenflächen und die Linien aus b,d,b,d.... die inneren Kantenwinkel der Cassetten.

Die körperliche Ecke q, welche durch die Decke und zwei Wände gebildet wird, hat ihre Kanten in qp und qp' und qA; man sieht also noch einen uncassettirten ebenen Raum zunächst dieser Kanten. Die Breite dieser Fläche wird durch das rechtwinkliche Dreieck mno in mn dargestellt. In ihr stehen die Winkelbänder omf, die sich mit der Vorderseite in f'm an die Cassettenlinie anschließen, die Breite der Balken haben und in or die Wandfläche durchdringen.

Ist die Linie vw bestimmt und in der Richtung vD' gezogen, so verlängere man eine Balkenkante (am) bis zur Kante pq, fälle die Normale no bis vw und ziehe die Richtung des Bandes mo. Die untere Breite wird gefunden, wenn man die Balkenkante durch F' nach pq verlängert, aus dem Durchschnitt eine Senkrechte auf vw fällt, die in r, dem Durchgangspunct dieser Kante in der Wand, schneiden wird. Auf gleiche Weise werden die andern Bänder dieser Wandseite gefunden. Die Zeichnung der Bänder in der andern Wandseite wird dadurch einfacher, daß man aus den Puncten w,w',w'' nach dem entgegengesetzten Distanzpunct ziehen kann und diese Linien durch die Senkrechten aus der Verlängerung der Balkenkanten nach p'q schneidet. Sollte für das Aufsetzen der Distanz, deren Hälfte unter der Figurentafel angegeben ist, der Raum auf der Zeichnenebene nicht zureichen, so hat man seine Zuflucht zu dem im § 72 ꝛc. angegebenen Hülfsmitteln zu nehmen.

131. — **Aufgabe.** Ein Ikosaëder perspectivisch zu zeichnen (Fig. 95 und 95a).

Das Ikosaëder ist bekanntlich ein Körper, durch 20 gleichseitige Dreiecke begrenzt, dessen fünfflächige Ecken in einer Kugelebene liegen. Aus Fig. 101 und 102 der orthographischen Projectionslehre sieht man, daß die horizontale Projection von einem regulären Zehneck umgrenzt wird; auch finden sich die Kantenlinien dort verzeichnet und wir können uns auf jene Figuren beziehen. Wir nehmen auch von dort und aus § 99 jenes Abschnitts ab, daß zwei horizontale Schnitte regelmäßige Fünfecke bilden, und beziehen uns auf jene Aufgabe bei Bestimmung der Abstände m'b'', b''i und im'', um nicht wiederholen zu müssen. Wir haben hier das Zehneck jener Figur in Perspective zu bringen, wie wir es in Fig. 95 sehen.

Scheuet man die Verwickelung der Constructionslinien nicht, so ist es bequemer, daß man den perspectivischen Grundriß so legt, daß die Puncte m und m' der Axe zusammenfallen, wie in Fig. 98 geschehen ist. Mit Hülfe des Grundrisses wird die Construction einfach, ohne ihn würde sie sehr complicirt werden. Die Axe mm', welche zugleich als Maßstab der Höhen zu benutzen, tragen wir in a''a,, über und auf selbige die Abstände der Mittelpuncte b'' und i der beiden Parallelflächen aus der genannten orthographischen Figur. Wir können nun entweder die beiden, auf dem horizontalen Durchmesser liegenden Puncte 1 und c durch Normalen aus dem Grundriß auf die Horizontalen i und b'' des Aufrisses projiciren und, mit Hülfe von jedem dieser Puncte und des beziehlichen Mittelpunctes, zwei reguläre Fünfecke in Perspective legen: oder einfacher, ein jedes dieser Fünfecke mittelst des Höhenmaßstabes construiren, indem man die perspectivische Höhe jedes Eckpunctes über dem der Grundfläche, deren geometrische Maße gleich a''b'' und a''i sind, bestimmt. Den Beschluß macht die Verbindung der Ecken, wozu die Verbindungslinien im Grundriß Anleitung geben, und welche erleichtert wird, wenn man zu jedem einzelnen im Aufriß gefundenen Eckpunct die gleichnamige Bezeichnung der Ecke im Grundriß beischreibt.

132. — **Aufgabe.** Es sei eine Wendel- (Spindel-) treppe zu zeichnen*) (Fig. 96).

Der Grundriß der Treppe (ein Kreis) ist mit der Stufentheilung in der Figur selbst perspectivisch gezeichnet und ein voller Umlauf der in der Ordnung

---

*) Es ist, um die Zeichnung nicht zu verwickelt zu machen, auf das Auflager der Blockstufen keine Rücksicht genommen worden.

o, 1, 2, 3 . . . ansteigenden Stufen auf 13 Steigungen bestimmt.

Man errichte in m eine Senkrechte mn, auf welche die Höhe der Stufe, wie sie dem Punct m zukommt, beliebig oft getragen wird.*) Ziehe eine andere Senkrechte in c, und trage die Höhen der Axe mn auf letztere über.

Beide Senkrechte dienen zu der Höhenbestimmung der einzelnen Stufen nach der Verkürzung, die sie über den verschiedenen Puncten des Grundrisses annehmen.

Nun ziehe man die Normalen aus o und c, des Grundrisses und schneide sie durch Ax, wodurch die Stirnseite der ersten Stufe erhalten wird. Aus x und dem Durchschnitt y ziehe nach y', so ergibt sich der Auftritt xyy' derselben Stufe. Eine Senkrechte aus dem Punct o', wo die Linie oo' den Grundriß der Spindel schneidet, gibt den Durchgang der Steigungsebene mit dem Mantel der Spindel.

Die eine Kante der zweiten Stufe liegt über x (so wie immer zwei Höhenkanten in einer Senkrechten liegen müssen); man hat daher nur die Höhenpuncte von 2 nach denen von 2 der Axe zu ziehen, um die zweite Steigungsfläche zu erhalten. Zieht man eine Normale aus der Ecke des Grundrisses zwischen 2 und 3, sucht für diese Ecke die Höhe von zwei Stufeneinheiten und trägt dies Maß auf die Senkrechte, wie bekannt, über, so ergibt sich v, und mit ihm die Figur des Auftritts der zweiten Stufe, welche in der rechten Seitenlinie die Spindel trifft. Eine Senkrechte in v von der beziehlichen Stufenhöhe mit dem Theil 3 der Axe verbunden, gewährt die Steigungsfläche der dritten Stufe, und eine

---

*) Diese Höhe richtet sich nach der Etagenhöhe, indem man diese in die Anzahl der erforderlichen Steigungen theilt.

Senkrechte aus c, drei Höheneinheiten gleich gemacht, gibt den Punct unter d, womit sich die Figur des dritten Auftritts ausführen läßt. Man zieht nun wieder eine Senkrechte cd und gibt derselben vier Höhen, zieht aus d nach dem Höhenpunct der vierten Steigung auf der Axe, sucht dann dieselbe Höhe, wie sie sich über dem Punct des Grundrisses zwischen 4 und 5 verkürzt, und kann nun den Auftritt für die vierte Stufe zeichnen.

Man wird sehr leicht in Irrthümer gerathen, wenn man nicht den hier vorgeschriebenen Gang von Stufe zu Stufe befolgt, namentlich ist dies um so mehr möglich, da wo die Stufen sich hinter der Spindel herum wenden. Die untern Flächen der Stufen sind nicht eher zu sehen, als bis sie sich über die Linie des Horizonts erheben, und selbst in der 14. Stufe zeigt sich noch ein schmaler Streif des Auftritts. Da die Stufen über der achten die vorhergehenden theilweis decken, so ist zwar anzurathen, auch die halbsichtbaren Stufen vollständig zu zeichnen, mit dem Ausziehen aber an dieser Stelle von oben herab zu beginnen. Die 11. Stufe wird wieder ganz vor der Spindel sichtbar. Die Linien, in denen die Steigungsflächen an den Mantel der Spindel treffen, werden, wie bereits bemerkt, durch Senkrechte aus den Eckpuncten der Spindel im Grundriß bestimmt.

Wir wollen schließlich nur noch nachweisen, wie man irgend einen Höhenpunct zu bestimmen hat, obgleich die Anleitung schon öfter gegeben worden ist. Man soll z. B. die Höhe d des vierten Auftritts finden. Der zugehörige Punct des Grundrisses ist c, wo man von der dritten zur vierten Stufe steigt. Man ziehe cc′ horizontal bis Ac, errichte im Durchschnitt c′ die Senkrechte c′d′, schneide diese in

d′ mit der Höhe des vierten Theils auf c,c⁰ und trage d′ durch eine Horizontale in d über.

Bei den Puncten des Grundrisses, die unter c, fallen, wie a, verlängere man Ac, beliebig und operire auf gleiche Weise; es folgt von selbst, daß auch bei dem Abschneiden des Maßes die Theillinie aus A über c,c⁰ hinaus nach b′ verlängert werden muß.

Nach Lösung dieser Aufgabe wird man im Stande sein, jede Treppe von irgend einer andern Wendung zu zeichnen.

133. — **Aufgabe.** Es sind verschiedene gerade, mehrfach gebrochene Treppen zu zeichnen (Fig. 97).

Die darzustellenden Treppen haben sämmtlich eine solche Lage, daß eine Fläche der Stufen parallel der Grundlinie der Tafel ist. Die geometrischen Breiten der Stufen bei A werden auf die Verlängerung CD gesetzt und durch die Diagonale OD auf OC übertragen, wo sie die perspectivische Breite der Stufen geben.

Die geometrischen Höhen trägt man auf OE und schneidet mit ihnen durch Gesichtslinien nach dem Augenpuncte die Senkrechten auf CO, und bei der Treppe B wagerecht aus den Theilpuncten die Senkrechten 1, 2, 3.... Von dem bei B erhaltenen Profil laufen die Kanten nach dem Augenpunct. Die Stufen bei G entstehen durch Uebertragung des Profils aus OE nach TH, da beide in gleicher senkrechten Ebene liegen, und aus B von 1,2,3.... nach G in 4,5,6...., wo die ersten die Höhen, die zweiten aber die Breiten der Stufen bei G geben.

Zu den Stufen bei K zieht man die Diagonale FI aus dem Distanzpunct und überträgt auf diese mittelst des Augenpunctes die Breiten aus 4,5,6, die von hier durch Horizontale nach LF übertragen

werden, wo sie mit den Puncten auf **FH** die Stufen bei **K** bilden.

Oder man trägt die Breiten aus 4 nach 10, 5 nach 11 und 6 nach 12 durch den beziehlichen Distanzpunct, wie dieses auf der andern Seite aus 7,8,9 nach **M** geschehen ist.

Wie die Stufen bei **P** aus der Diagonale **QR**, auf welche die Breiten aus **F4** übertragen wurden, sich abgeleitet haben, sieht man aus den Constructionslinien; die Treppen bei **S** und **T** hingegen, bildeten sich aus den Puncten 13,14,15 und 16,17,18, auf welche sie von **FB** übertragen wurden.

Die Höhe dieser Stufen wurde aus **IH** nach der Senkrechten über dem Punct **U**, und von hier aus nach den beiden Treppen bei **S** und **T** projicirt.

Die Treppe bei **WX** erfordert zuerst die Aufsuchung der Puncte **X** und **W**, wovon man **W** im Grundriß durch die Diagonale 19 **Z** und die Gesichtslinie **YZ** erhalten hat, welche letztere aus der geometrischen Breite **F25** und der Diagonale **FY** entsteht.

Die Höhe der Stufen auf **W20** kommt aus **FH** nach der Normalen 21,22 und von hier aus nach **W20** zu stehen, auf welche man soviel gleiche Theile trägt, als man auf **WX** Stufen verlangt. Die Breite der Stufen auf **WX** könnte man auf 19,13 setzen und von hier durch Diagonalen auf die verlängerte Linie **YZ** in 23 und 24 bringen; bequemer ist's, daß man nur den Punct 13 nach 23 überträgt, in 23 eine Normale 23.26 errichtet, welche aus **W20** mit der Höhe von 6 Stufen, als deren Anzahl, auf 19,13 geschnitten wird, woraus der Punct 26 entsteht, durch welchen man aus **W** die Linie **WX** zieht.

Diese gibt mit Durchschnitten nach dem Augenpunct aus **W20** die einzelnen Stufen der ganzen Treppe.

Sollten bei Treppen die Stufen nicht senkrecht zum Profil laufen, oder bei gebrochenen Treppen die höhern Abtheilungen der Treppe sich nicht rechtwinklich brechen, so wird man in diesem sehr seltenen Fall sich nach den über abweichende Linien und Flächen vorgetragenen Regeln leicht zu helfen wissen.

134. — **Aufgabe.** Die Figur (Fig. 98), welche hier perspectivisch dargestellt ist, hat den Anschein, als verlangte deren Zeichnung eine vielseitige Anwendung constructiver Regeln, verliert ihn aber, wenn man in ihre wesentliche Zusammensetzung eingeht. Der Grundkörper ist das Durchdringen zweier Tetraëder (dreieckiger gleichseitiger Pyramiden), dergestalt, daß jede Seitenfläche des einen von dem andern eine Spitze abschneidet, und alle diese pyramidalische Spitzen gleich sind; jedes Tetraëder ist ausgehöhlt.

Der Grundriß ist ein reguläres Sechseck abcdef, in welchem die Kantenverbindung und die Durchbrechung mit Linien angegeben ist. Nach diesem Grundriß wird die Construction des perspectivischen Bildes bei einigem Nachdenken leicht. Nachdem die zwei sich schneidenden Dreiecke in Perspective gelegt worden, welche durch die Flächen aec und bdf (der Ansicht) entstehen, construire man die orthographische Projection der Höhenansicht, um die Puncte auf der Axe zu erhalten, durch welche die beiden horizontalen Dreiecksebenen gehen, und ordne mittelst der Axe mn den Höhenmaßstab.

Zuerst construire man nun die beiden horizontalen Dreiecke mit Benutzung des gleichen Abstands von der Grundebene und der senkrechten Lage über den Ecken des Grundrisses und ziehe die Verbindungslinien der Ecken unter sich und mit den Spitzen m und n. Wäre der Tetraëder nicht durchbrochen, so wäre die Arbeit damit beendigt, so aber ist es

nöthig, die Puncte $\alpha\beta\gamma$... aufzusuchen, wobei man auf gleiche Weise verfährt.

Die Aufgabe hat zwar keinen practischen Werth, ist aber eine sinnreiche Uebung des Vorgetragenen. Deshalb ist auch die Auflösung nur in einzelnen Momenten angedeutet worden. Eben so sind die Figuren 99, 100 und 101 dergleichen Uebungsaufgaben. Auch bei ihnen werden wir nur wenig Andeutungen geben.

135. — Die Holzverbindung Fig. 99 verlangt nichts mehr als die Kenntniß derjenigen Sätze, die sich auf die perspectivische Construction von Quadraten, Würfeln und die Theilung von Linien beziehen, die auf die Tafel senkrecht stehen.

Der Augenpunct ist in A, die Distanz in D gegeben; die Säulen, Balken und Bänder haben gleiche Dimension nach Breite und Dicke, daher auch der Abstand der Parallelen mm' und nn' dieser gleich ist; nur die Höhe der Schwellen und Rahmstücke ist um den Kamm bei g' größer.

136. — Ziemlich gleich ist auch die Operation, welche Fig. 100 erfordert. In Allem herrscht der Würfel vor, sowohl als Hauptfigur des Ganzen, als in dem Durchdringen der einzelnen Theile. Augenpunct und Distanz sind die der vorigen Figur. Wir können uns hier um so mehr der weitern Ausführung enthalten.

136a. — Obgleich die Elemente dieser Figur meistens aus Würfeln besteht (Fig. 101), so müssen wir doch etwas tiefer in die Construction eingehen, weil manche rückliegende Theile durch vordere verdeckt werden.

An einem Kern, der aus drei Kreuzarmen besteht, die sich rechtwinklich durchdringen und wovon jeder aus drei gleichen Würfeln zusammengesetzt ist, sind acht eben so große dergestalt angesetzt, daß im-

mer drei Kanten mit denen des Kernes zusammenfallen, wonach jeder dieser acht Würfel von dem andern um einen Würfelraum getrennt wird, der hohl ist; übrigens ist jedes Ende des innern Kreuzes mit einer Pyramide besetzt, deren Grundfläche ebenfalls einer Würfelseite gleich ist. Die Würfelseite abcd liegt parallel der Tafel. Da der innere Kern bei der Construction indifferent ist und sich von selbst ergibt, so beginne man damit, daß man den Hauptwürfel abcdef entwerfe. Durch Dreitheilung der sämmtlichen Kanten, und Verbindung der correspondirenden Theilpuncte bilden sich die einzeln stehenden acht kleinern Würfel mit den hohlen Zwischenräumen ohne Weiteres, so wie sich dadurch auch die Grundflächen der Pyramiden ergeben. Zieht man auf diesen die Diagonalen, so geben die Durchschnitte derselben die Fußpuncte der Höhen, aus welchen man Normalen zieht und sie gleich einer Quadratseite macht. Man bemerke, daß die Richtung der Höhe auf ghik die Richtung der Gesichtslinien nach

⫲

dem Augenpunct hat, d. i. P hi ist, während die Höhe oo' horizontal liegt. Wie die bestimmten Höhen dem Maße nach abzuschneiden sind, bedarf keiner Erörterung.

137. — **Aufgabe.** Eine halbgeöffnete Thür zu zeichnen (Fig. 115).

Es sei aa' die Grundlinie einer Seitenwand, welche in dem Augenpunct A verschwindet, cc'dd' die Oeffnung der Thür, welche von der Tafel 1 Fuß absteht, $3\frac{1}{2}$ Fuß breit und einflüglich ist. Die Thür dreht sich um die Axe dd', beschreibt daher mit dem Flügel beim Oeffnen einen Halbcylinder, dessen Grundlinie ein Halbkreis ist. Dieses gibt die einfachste Methode, den Flügel in jeder Stellung seiner Oeffnung zu zeichnen. Man beschreibe nemlich

mit dem Halbmesser, gleich der Thüröffnung, in cd′ efg einen perspectivischen Halbkreis, bezeichne die Stellung des Thürflügels durch dessen Grundlinie in dd, de.... und ziehe d,d,,, oder ee′... senkrecht. Um die obere Kante zu erhalten, suche man den Verschwindungspunct von dem beziehlichen Halbmesser und schneide aus ihm die Senkrechte durch d′, wodurch die verlangte Stellung des Flügels gefunden ist. Man bemerke, daß bei der Stellung des Flügels auf dd,, de der Verschwindungspunct auf die linke Seite, bei df aber auf die rechte Seite des Augenpuncts fällt und, steht der geöffnete Flügel parallel mit der Tafel auf dg, dann ist auch nothwendig dessen obere Kante parallel dem Horizont.

Man würde die Zeichnung des Flügels auch ausführen können, wenn man die Grundlinie, z. B. dd, der Thürbreite perspectivisch gleich, und die Senkrechte d,d,, gleich der Thürhöhe mit Hülfe des Höhenmaßstabes machte.

138. — **Aufgabe.** Die Thür sei eine zweiflügliche Bogenthür (Fig. 115).

Die Breite der Oeffnung hk, deren Höhe bis an den Bogen hh′, und die Oeffnung ist mit der Wand perspectivisch entworfen.

Hier ist die halbe Breite der Oeffnung als Halbmesser zweier perspectivischen Halbkreise pli und ios zu nehmen. Sind diese gezeichnet, so ziehe man die Grundlinie hh, der halben geöffneten Thür, errichte eine Senkrechte in h, und mache diese der Höhe von ih,, für den Grundpunct h, gleich. Der obere Schluß dieses Flügels ist ein Viertelkreis, zu welchem der Durchmesser kh oder k′h′ ist. Derselbe wird durch Uebertragen der Constructionslinien, welche bei dem Zeichnen des Halbkreises k′h′h,, gedient haben, construirt, nachdem man mittelst des Verschwindungspunctes von hh, den zugehörigen

Durchmesser, wovon ein Endpunct h' ist, gefunden hat. Ebenso hat man bei dem andern Flügel zu verfahren, der hier sich um so leichter zeichnen läßt, als derselbe parallel der Tafel steht, wo o'k' einen geometrischen Viertelkreis bildet.

139. — **Aufgabe.** Es sollen die Bogen in Wänden gezeichnet werden, welche verschiedene Neigungen gegen die Grundlinie der Tafel haben (Fig. 116).

Der Raum, den die Wände einschließen, ist ein Achteck, dessen Perspective auf der Grundebene in fgab... verzeichnet ist. Sind auf diesen Grundriß die Wände selbst gestellt, und die geometrischen Maße auf der Durchschnittslinie ff' aufgetragen, wo fq die Höhe des Widerlagers, qv die Höhe des Bogens ist, so zeichne man die Breiten der Oeffnungen in den innern Wänden und ziehe Senkrechte. Man suche die Verschwindungspuncte von fg, ga auf dem Horizont und ziehe nach ihnen aus q, w und f' Linien. Wo diese die Kante gg' in rw' und g' schneiden, ziehe man wieder Richtungen nach dem zugehörigen Verschwindungspunct, wodurch die Puncte sw'' und d erhalten werden. Aus diesen endlich zieht man Parallelen mit der Grundlinie, da ab dieser parallel liegt. Wo die Linien aus q, r und s die Senkrechten der Ausschnitte schneiden, bestimmen sich die Lagen und Größen der Durchmesser für die Bogen, und man kann nun zu der Construction dieser Halbkreise selbst schreiten. Durch die bis hieher vorgenommene Operation sind, wenn die Senkrechten der Mauerausschnitte gehörig verlängert werden, über jedem der Durchmesser halbe Quadrate gewonnen worden, welche die Halbbögen umschreiben. Es kommt also nur darauf an, letztere auf die bekannte Weise einzuzeichnen. Man beschreibt nemlich auf die Horizontale nm (welche durch q geht) einen

Viertelkreis mnp, halbirt den rechten Winkel durch no und zieht ov, vv', v'v'' nach den beziehlichen Verschwindungspuncten und in den halben Quadraten aus den Mitten der Durchmesser Diagonalen nach den Ecken. Die Durchschnitte dieser Diagonalen mit den aus v gezogenen Linien geben Puncte der gesuchten Halbkreise, deren Zeichnung nun leicht geschehen kann. Für die Wand auf ab ist der Halbkreis ein geometrischer, dessen Mittelpunct auf sc' liegt, wo die Normale aus der Mitte von a'b' diese in c' schneidet.

Um die Bögen auf der Rückseite der Mauern zu finden, hat man auf gleiche Weise zu operiren. Abkürzungen bei der letztern Operation, da nur ein geringer Theil der hintern Bögen zur Ansicht kommt, müssen dem eigenen Nachdenken überlassen bleiben; spätere Aufgaben werden dahin leiten.

Da bei mehren der folgenden Aufgaben Sätze anzuwenden sind, welche auf die Lehre von schiefen Ebenen hinweisen, so wollen wir diese hier folgen lassen, vorläufig aber bemerken, daß die einfachen Körper, als Pyramide, Cylinder und Kegel, nicht in besondere Aufgaben gefaßt worden sind, indem die Constructionen nach den Belehrungen über Flächen und Höhenpuncte zu einfach sind, als daß sie einer Erläuterung bedürften, deren Bildung aber in andern zusammengesetztern Aufgaben noch häufig eingeflochten sein wird.

Fünfter Abschnitt.

Von den schiefen Ebenen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erläuterungen.

140. — Der Begriff einer schiefen Ebene kann bloß beziehungsweise auf andere festgestellt werden, denen an sich eine absolute Lage im Raume eingeräumt worden ist. Dergleichen Ebenen sind die in der Projectionslehre als wagerecht angenommene Grundebene und die lothrecht gestellte Bildebene oder Tafel.

Im Allgemeinen sind sämmtliche Ebenen, die mit einer dieser beiden Normalebenen eine Neigung eingehen, zu den schiefen zu rechnen.

Manche beschränken den Begriff dahin, daß sie ihn bloß auf die Lage gegen die Tafel beziehen, und verstehen unter schiefen Ebenen nur solche, die mit der Tafel weder parallel noch auf sie senkrecht, sondern gegen sie eine geneigte Lage einnehmen. Wir folgen dem allgemeinen Begriff.

Nach dieser Definition kann eine schiefe Ebene folgende Lagen haben; sie kann

a) aus der mit der Tafel parallelen Lage vor- oder rückwärts geneigt sein. In dem ersten Falle ist sie eine abfallende (Fig. 95, 96), in dem zweiten eine ansteigende Ebene; in beiden Fällen liegen deren Durchschnittslinien mit der Grundebene und der Tafel parallel der Linie, wo diese und die Grundebene sich schneiden. Die schiefe Ebene

kann aber die Tafel ober- oder unterhalb dieser Linie schneiden, und diese Durchschnittslinie heißt die Grundlinie der schiefen Ebene*); sie kann auch mit der Hauptgrundlinie zusammenfallen;

b) aus einer ursprünglicher Stellung, in der sie gegen die Tafel und gegen die Grundebene normal war, in eine nach rechts oder links gegen die Grundebene geneigte Lage gebracht sein. Hierbei wird deren Grundlinie (in der Tafel) eine geneigte Lage mit der Verticalen eingehen; die Durchschnittslinie in der Grundebene aber behält mit der Hauptgrundlinie eine rechtwinkliche Lage bei; oder es steht diese Ebene auf einer Linie, die den Augenpunct des Bildes zum Verschwindungspunct hat.**)

c) sie kann endlich eine solche Lage haben, daß die Durchschnittslinie mit der Grundebene eine geneigte Lage gegen die Hauptgrundlinie und der Durchschnitt mit der Tafel eine geneigte Lage gegen die Verticale hat (Fig. 97, 98).

---

*) Wir werden in der Folge, wenn Verwechselung statt finden könnte, die Durchschnittslinie der Grundebene mit der Tafel Hauptgrundlinie oder Grundlinie der Tafel nennen.

**) Man könnte die Ebenen, welche aus der unter b) angenommenen ursprünglichen Stellung in eine gegen die Tafel geneigte übergehen, wohl als eine besondere Klasse schiefer Ebenen rechnen, und es würde die oben gegebene Definition eigentlich mehr auf solche passen. Bei genauer Betrachtung aber wird sich zeigen, daß diese Stellung genau die Lage unter b) ist, wenn man die Tafel mit der Grundebene verwechselt. Auch wird bei den hier bemerkten Ebenen, die senkrecht der Grundebene und in dieser auf einer Linie stehen, die ihren Verschwindungspunct in dem Horizont haben, während die Durchschnittslinie mit der Tafel parallel der Verticale ist, weder der Horizont noch der Augenpunct verändert.

In diesem Falle wird die schiefe Ebene gehörig verlängert die Grundlinie der Tafel schräg schneiden.

Die schiefen Ebenen unter a) und b) nennt man einfach-schiefe, die unter c) doppelt-schiefe Ebenen, sie können ansteigend oder abfallend vorkommen.

141. — Nehmen wir die Grundebene und Tafel in ihrer Normalstellung, drehen dann die Tafel nebst der schiefen Ebene um die Grundlinie ab als Axe, bis beide den Winkel zurückgelegt haben, den die schiefe Ebene mit der Grundebene machte, so wird die Ebene in die Grundebene zu liegen kommen. Projiciren wir nun eine auf der schiefen Ebene befindliche Figur bei unverrücktem Stand des Auges auf die jetzt schiefliegende Tafel, so erscheint sie in horizontaler Lage (Fig. 96). Bringen wir hierauf die Tafel in die normale Stellung zurück, dann kann auch die Zeichnung nicht mehr als horizontale Ebene, sondern als schiefe Ebene (nach a)) dem Auge erscheinen.

Es soll z. B. die Figur abcd auf die schiefliegende Bildtafel M gezeichnet werden, so geschieht dies nach den bekannten Regeln, indem wir die Horizontale Ao ziehen, um in dem Punct o den Augenpunct zu bestimmen, die Augenlinien ao und bo ziehen und sie durch die Theillinien Ac und Ad schneiden. Wir haben dann auf der geneigten Tafel das horizontale Bild von abcd von A aus gesehen.

Bei Wiederaufrichtung der Tafel in die normale Stellung N kann nun ersichtlich das gezeichnete Bild nicht mehr als horizontales erscheinen, weil für dieses andere Durchgangspuncte in der Tafel statt haben müssen; es wird sich nothwendig für dieses ein neues Bild ergeben, welches jedenfalls tiefer als das erste liegt und durch die Puncte c'',d'' bestimmt wird, während sich die Puncte c',d' bei der Rück-

drehung aufwärts bewegt haben. Das Bild abcd hat sich sonach auch für das Auge mit der Tafel zugleich zur ansteigenden Ebene gehoben und erscheint nun als schiefe Ebene von einem solchen Neigungswinkel, als die Tafel rückwärts bewegt worden.

Da bei Entwerfung der Zeichnung auf der geneigten Tafel o der Augenpunct war, in welchen die Linien ac und bd ausgingen, so muß er auch nach der Aufrichtung der Tafel Verschwindungspunct bleiben, und es muß auch jetzt po gleich po' bleiben. Nunmehr ist aber a' Augenpunct der normalen Tafel, und es wird die Linie Ao um einen Winkel oAo' steigen, die Distanz des Auges von dem Augenpunct der schiefen Ebene aber die Linie Ao' sein.

Wir haben daher in o' den Verschwindungspunct für alle Linien auf der schiefen Ebene, die normal der Grundlinie ab liegen, haben in Ao' die Distanz, womit die Distanzpuncte auf dem Horizont der schiefen Ebene und der Hülfspunct auf der Verticale bestimmt werden, und den Winkel oAo' gleich dem Neigungswinkel mbd der schiefen Ebene gegen die Grundebene.

Hieraus folgt, daß, um den Augenpunct für schiefe Ebenen dieser Klasse zu erhalten, der Neigungswinkel mbd an die Horizontale Ao im Gesichtspunct angelegt werden muß.

142. — Wir haben jetzt die Beziehung einer schiefen Ebene im Raume betrachtet; was für diesen gilt, muß auch auf die Construction in der Zeichnungsebene Anwendung finden.

Da die Gesichtslinie (Distanz) in Ad niedergelegt ist, so haben wir den gegebenen Neigungswinkel in dem Distanzpunct d geometrisch anzusetzen und damit die Verticale o'p zu schneiden, um den Punct o, den wir zur Unterscheidung Hauptpunct nennen wollen, für die gegebene Lage der schiefen

Ebene zu erhalten. Derselbe tritt in alle Beziehungen zu dieser, wie der Augenpunct A zu der horizontalen Ebene; die Verticale beider fällt zusammen. Da der Horizont stets normal der Verticale durch den Augenpunct liegt, so muß auch hier der Horizont der schiefen Ebene den Punct o' aufnehmen und parallel dem Horizont Ad der Grundebene sein.

Den Horizont schiefer Ebenen nennt man Grenzlinie, er läuft stets parallel der Grundlinie der beziehlichen Ebene und kann ober- oder unterhalb des Augenpunctes liegen. Der letzte Fall findet statt, wenn die Ebene abfällt, indem dann der Neigungswinkel unterhalb des Horizonts dA angelegt werden muß.

143. — Der Distanzpunct einer schiefen Ebene kann nicht mit dem der horizontalen zusammenfallen, weil er von dem Abstand des Auges von der Tafel abhängt und immer die Entfernung desselben von dem Augenpunct bezeichnet (Fig. 99). Da nun hier Do dieser Abstand ist, so ergibt sich der Distanzpunct für diese schiefe Ebene, wenn man Do aus o zu beiden Seiten in od und od' legt. Das gleiche Maß in oE getragen, bestimmt den Hülfspunct E, während D die Distanz und V der Hülfspunct für die horizontale Ebene ist.

Wie V bei der letztern zum Auftragen der Gradtheilung auf den Horizont AD benutzt wird, und D der Verschwindungspunct für Linien von 45° Neigung ist, so ist auch E dahin zu benutzen, um die Grenzlinie nach Gradmaß zu theilen, und d um Linien unter 45° mit der Grundlinie zu ziehen.

144. — Um die angegebenen Sätze in allgemeinerer Form zusammenzustellen und auf deren mathematische Beziehungen aufmerksam zu machen, wollen wir Fig. 100 zu Grunde legen, indem wir uns selbige als Raumgebild denken.

Wir haben in VRQT die Grundebene, PRQF die Tafel, O den Gesichtspunct (das Auge), P den Augenpunct, daher in PQ die Verticale, RF die Grundlinie, Pm den Horizont.

Zugleich ist aus dem Vorigen bekannt, daß OP normal der Tafel, also alle Winkel um P, deren andere Schenkel in der Tafel liegen, rechte sind. Demnächst sei ABR eine ansteigende Ebene, deren Grundlinie mit der Hauptgrundlinie zusammenfällt. AQ und TQ sind senkrecht auf die Grundlinie RF angenommen, wonach der Winkel TQA der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Grundebene, der Winkel PQA aber der Neigungswinkel mit der Tafel ist.

1. Die Grenzlinie pw ist dem Horizont parallel, folglich ist auch der Winkel $P\pi p$ ein rechter. Ist also der Augenpunct und die Linie $P\pi$ gegeben, so läßt sich auch die Grenzlinie ziehen. Ist dagegen die Grenzlinie und der Augenpunct gegeben, so ist auch $P\pi$, als Normale zu construiren und somit der Hauptpunct π leicht zu finden.

2. Der Winkel $O\pi P$ ist dem Neigungswinkel πQA gleich, weil πO parallel AQ. Analytisch kann πP gefunden werden als Cotg. $\angle$ PQA, wenn man OP als Radius gleich 1 setzt.*)

Da der Winkel πOP dem Neigungswinkel gegen die Grundebene gleich ist, so ist πP auch Tangente des Winkels AQT.**)

Durch Construction wird πP auf der Verticale gefunden, wenn man Pm gleich der Distanz PO, und den Winkel πmP gleich dem Neigungswinkel AQT macht.

---

*) Es ist nemlich $\pi P = OP \times$ Cotg. PQA.

**) Nemlich $P\pi = OP \times$ tg. πOP.

3. Ist Pπ und die Grundlinie der Tafel bekannt, so findet man die Grenzlinie pw für die schiefe Ebene, wenn man eine Parallele durch π mit der Grundlinie zieht.

4. Der Abstand des Auges O von dem Hauptpunct π ist gleich der Cosec. des Neigungswinkels gegen die Tafel für den Radius OP*) oder gleich der Sec. des Neigungswinkels mit der Grundebene;**) welche Formeln auch zur analytischen Bestimmung der Neigungswinkel reducirt werden können.

5. Alle auf der schiefen Ebene senkrechte Höhen sind im Bild nicht geometrisch, wohl aber ⋕ P; d. i. sie haben einen gemeinschaftlichen Verschwindungspunct q, welcher gefunden wird, wenn man auf Oπ in O eine Senkrechte Or errichtet und sie mit der verlängerten Verticale schneidet. Es ist dann q der verlangte Verschwindungspunct, nemlich der Durchgangspunct von der Normalen durch die (verlängerte) Tafel.

Zu analytischer Bestimmung des Punctes q dienen folgende Formeln. Es ist nemlich Or normal der schiefen Ebene, Oπ ihr parallel, daher der Winkel POr gleich dem OπQ und gleich dem Neigungswinkel PQA der schiefen Ebene gegen die Tafel. Nimmt man OP als Radius, so ist Pq die Tangente, Oq Secante dieses Neigungswinkels.***)

Durch Construction findet man q (wenn man das Dreieck POq umgelegt denkt, daß PO auf Pm fällt), indem man den Neigungswinkel PQA (gleich POq) an den Horizont Pm in m (den Distanzpunct) legt und dessen Schenkel durch die Verticale schneidet.

---

*) D. i. Oπ = Cosec. ∟ PπO × OP.

**) Nemlich Oπ = Sec. POπ × OP.

***) Man hat nemlich Pq = tg. PQA × OP, und Oq = Sec. PQA × Oq.

Was für die hier angenommene Lage der schiefen Ebene gilt, findet auch bei den andern Lagen, gehörig modificirt, Anwendung.

145. — Da bei den Ebenen zweiter Klasse (b)) die Ebenen auf Linien stehen, welche normal der Grundlinie der Tafel sind, daher ihren Verschwindungspunct in dem Augenpunct haben, so kann dieser keine Veränderung erleiden und fällt mit dem Augenpunct der schiefen Ebene zusammen. Alle Linien in der schiefen Ebene, die senkrecht ihrer Durchschnittslinie mit der Grundebene sind, liegen der Tafel parallel, und ihre Projectionen auf die Grundebene müssen im Bilde geometrisch parallel erscheinen.

Deren Grundlinie ab (in der Tafel) macht mit der Hauptgrundlinie einen Winkel, welches der Neigungswinkel der schiefen Ebene ist. Da aber der Horizont mit der Grundlinie stets parallel ist, so muß nothwendig die Grenzlinie dd′ den Horizont ebenfalls unter dem Neigungswinkel der Ebene in dem Augenpunct A schneiden.

Dadurch erhält zugleich die Verticale AE eine andere, nemlich die normale Lage gegen dd′. Die Distanz AV aber bleibt dieselbe, und man hat daher nur AV in Ad und AE zu tragen, um die Distanzpuncte d,d′ und den Hülfspunct E zu erhalten.

146. — Für die dritte Klasse (c)) der schiefen Ebenen, die doppeltschiefen (Fig. 101), hat die Durchschnittslinie mit der Grundebene einen besondern Verschwindungspunct, der zu Bestimmung der Hülfslinien und Puncte nöthig ist. Wie derselbe in Bezug auf die Abweichung der Durchschnittslinie von der Hauptgrundlinie, durch Anlegung des Abweichungswinkels an die Verticale in V, gefunden wird, ist nach § 51 als bekannt vorauszusetzen.

Eine zweite nöthige Bedingung ist der Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Grundebene. Da diese Winkelebene jedoch nicht parallel der Tafel ist, so muß dessen perspectivische Projection gefunden werden.

Es sei ay die Durchschnittslinie der schiefen und Grundebene (Fig. 102), die Erhebung der ersten unter dem Neigungswinkel α, und A der Durchschnitt von AB mit der Grundlinie der Tafel. Man verlängere AB bis an den Horizont in p, ziehe pD und den rechten Winkel pDc, dann Ac; so sind die Puncte p und c die Verschwindungspuncte für alle rechte Winkel auf der Horizontalebene, also auch für den Winkel pAc.

Es bedarf der normalen Ebene auf cA, um den Neigungswinkel der schiefen mit der horizontalen Ebene aufzusetzen. Zieht man cE normal der Hauptgrundlinie, so ist c der Hauptpunct, cE die Grenzlinie und cD der Abstand des Auges von dem Hauptpunct (die Distanz) in Bezug auf gedachte senkrechte Ebene, welche um den Winkel cDP von der Verticale abweicht.

Ferner ist, wenn cd gleich cD gemacht wird, d der Hülfspunct, an den man den Winkel cde = α anzusetzen hat, um den Verschwindungspunct e für alle Linien zu finden, welche die gegebene Neigung haben.*)

Die Verticale steht senkrecht auf ep und geht durch den Augenpunct P, trifft also die Grenzlinie in π, womit der Hauptpunct der schiefen Ebene ge-

*) Es sind nemlich eAp und cAp rechte Winkel, und eAc ein senkrecht stehendes Dreieck. Die Linie Ap hat ihren Verschwindungspunct p in dem Horizont, Ae in der Grenzlinie in e; beides sind daher unendliche Linien, die nothwendig in der schiefen Ebene liegen, weshalb die Grenzlinie der doppelt geneigten Ebene durch e und p gehen muß.

funden ist. Zieht man PK normal der Verticale πP, macht PK gleich der Distanz PD und zieht πK, so ist πKP der Neigungswinkel gegen die Tafel und πK die Distanz der schiefen Ebene, womit der Hülfspunct o bestimmt wird, wenn man πo gleich dieser Distanz macht.

Durch o läßt sich wieder die Grenzlinie in Grade theilen, wenn Winkel auf der schiefen Ebene construirt werden sollen. Eine Parallele AH mit ep gibt die Grundlinie für die schiefe Ebene, auf welcher alle Maße dieselbe geometrische Größe haben, wie auf der Grundlinie EF der Tafel.

Da die vorliegenden Bestimmungen auf die Stellung der Flächen im Raum bezogen worden sind, so werden Beispiele hierüber nützlich sein, um die Anwendung dieser Sätze auf die Constructionen in der Zeichnenebene zu erläutern.

Zweites Kapitel.

Einfach-schiefe Ebenen.

A. Wenn die Grundlinie der schiefen Ebene parallel der Grundlinie der Tafel ist.

147. — **Aufgabe.** In einer aufwärts steigenden Ebene von 20° Neigung gegen die Grundebene soll die Linie co in der Größe von ce abgeschnitten werden (Fig. 105).

Da die Parallelen mit der Durchschnittslinie auf dieser einfach-schiefen Ebene geometrisch parallel der Grundlinie sind und die Senkrechten auf ihr den Hauptpunct o zum Verschwindungspunct haben, so suche man nach § 145 den Theilpunct d', welcher von o in dem Abstand oD' des Auges auf der Grenzlinie entfernt liegt.

Der Punct d' ist der Theilpunct für alle Linien, die senkrecht der Grundlinie in der schiefen Ebene liegen. Zieht man daher ed, so schneidet diese cf gleich ce auf co ab.*)

148. — **Aufgabe.** Um auf dieser schiefen Ebene im Bilde eine Linie in a zu zeichnen, welche β^o von der Verticale abweicht (Fig. 110), trage man πp aus π nach t. An diesen Hülfspunct setze man den Winkel $\pi tx' = \beta^o$ und ziehe ax'. Alle Linien, die auf der schiefen Ebene von einem beliebigen Punct nach x' laufen, haben die gleiche Abweichung.

149. — **Aufgabe.** Man soll an ax' in a einen rechten Winkel setzen. Alles wie zuvor vorausgesetzt, setze man in t an tx' einen rechten Winkel x'ty, wodurch in y' der Verschwindungspunct aller Linien erhalten wird, welche, aus irgend einem Punct der schiefen Ebene gezogen, auf den Richtungen ax', a'x'... normal stehen.

150.—**Aufgabe**. Es sei die Grundlinie einer solchen schiefen Ebene (wo sie nemlich die Tafel schneidet) zu bestimmen. Man ziehe aus dem Hauptpunct π eine beliebige Richtung, welche die Durchgangslinie der schiefen und Grundebene, etwa in u, schneidet; eine andere durch den Augenpunct P und den Punct u bis zu der Grundlinie der Tafel in x. Aus x fälle man eine Senkrechte, welche πu in z schneiden wird, und ziehe zr parallel der Grundlinie ab: so ist zr die verlangte Durchgangslinie.

---

*) Ist das Maß nicht als Linie ce, sondern in Maßeinheiten gegeben, so lehrt § 52 und folg., wie man das Abschneiden mit Hülfe der Grundlinie ab auszuführen hat.

Wenn ce die Durchschnittslinie auf der Grundebene ist, und fällt man aus dem Endpunct F eine Normale FF', deren Fußpunct man durch cA schneidet, so ist cf' die Projection der Linie cf auf der Grundebene im Bilde, welche bei Projectionen zuweilen gebraucht wird.

151. — **Aufgabe.** Auf der im vorigen § angenommenen schiefen Ebene ein Quadrat zu zeichnen, wozu ce als Seite gegeben ist, die mit dem Horizont parallel läuft (Fig. 105).

Die ce anliegenden Seiten werden nothwendig den Hauptpunct o zum Verschwindungspuncte haben. Man ziehe daher die Augenlinien co und eo, trage oD' in od', um den Verschwindungspunct für die Richtungen nach dem 45° zu erhalten, und schneide co durch ed, oder eo durch cd', wo dann das Quadrat durch die Parallelr fa ergänzt wird.

152. — **Aufgabe.** Auf derselben geneigten Ebene soll ein Quadrat gezeichnet werden (Fig. 101), dessen Abweichung gegen die Verticale 40° nach der Rechten beträgt, während die geometrische Länge der Quadratseite in ab und die Ecke des Quadrats in a gegeben ist.

Ist der Hauptpunct o und der Hülfspunct E gefunden, so trägt man in E den Winkel oEx von 40°, welchen die Seite ac mit der Verticale bilden soll, und hat damit den Verschwindungspunct für ac gefunden.

Der jenseitige Verschwindungspunct für af ergibt sich durch den rechten Winkel xEy, und man kann nun die Richtungen dieser beiden Quadratsseiten ziehen.

Um deren Länge abzuschneiden, braucht man den Theilpunct t; man findet ihn, wenn man xE in xt trägt, und schneidet nun den Punct c durch die Theillinie bt ab. Zu Ergänzung des Quadrats kann man entweder einen zweiten Theilpunct t' oder den Verschwindungspunct für die Diagonale aufsuchen. Den ersten findet man wie t, von y aus, den letztern, indem man den Winkel xEy halbirt oder einen Winkel xEm von 45° in E ansetzt.

153. — **Aufgabe.** Man soll auf die besprochene schiefe Ebene in a eine senkrechte Höhenlinie setzen, die einer gegebenen Linie mn gleich ist (Fig. 108).

Man verbinde den Hauptpunct π mit dem Distanzpunct p und lege in p einen rechten Winkel πpk, welcher die Verticale in k schneiden wird. Dieser Punct ist Verschwindungspunct für alle Höhenlinien, wie ac, df..., die senkrecht der schiefen Ebene stehen. Um ac der auf der Grundlinie liegenden Linie mn gleich zu machen, suche man den Theilpunct i. Es kann nemlich eine Parallele durch k mit dem Horizont als Grenzlinie betrachtet werden, aller Linien und Ebenen, die senkrecht der schiefen Ebene stehen; trägt man daher pk in ki, so ergibt sich in i der Theilpunct (Distanzpunct) für alle diese Linien oder der Verschwindungspunct, in den alle Linien ausgehen, welche die gedachten Höhen unter 45° schneiden, indem ki die Entfernung des Auges von der Tafel, weil Tangente von 45°, ist. Da nun ab gleich mn in dem Punct a ist, so schneide man ac mit der Richtung ib, um in c die verlangte Höhe zu erhalten. Eben so erhält man die Höhe d'f' gleich d'e', wenn d'e' als Maß gegeben ist.

154. — **Aufgabe.** Durch dieses Verfahren wird es leicht, ein Quadrat abch oder a'd'f'h', welches sich auf dieser schiefen Ebene senkrecht erhebt, perspectivisch zu zeichnen (Fig. 108).

Und setzt man für dieses Quadrat eine unbegrenzte Ebene, so lassen sich auf dieser wieder alle möglichen Winkel und Linien projiciren, wenn man die Distanz kp von k nach w trägt, und den Punct w als Hülfspunct zur Gradtheilung der Grenzlinie ki gebraucht.

155. — **Aufgabe.** Eine Ebene zu zeichnen, welche sich von der Grundlinie der Tafel aus um 32° abwärts neigt (Fig. 106).

Die Grundlinie der Tafel sei ab und zugleich die der abfallenden Ebene, PD der Horizont.

Man suche zuerst die Grenzlinie der geneigten Ebene, die unter diesen Voraussetzungen nothwendig unter dem Horizont liegen muß. Man trage deshalb den gegebenen Neigungswinkel in PD'π an, und ziehe durch den Durchschnitt π, den Hauptpunct, eine Parallele mit dem Horizont, als Grenzlinie für die schiefe Ebene. Dann trägt man den Abstand πD' des Auges in d und t, und findet so den Hülfspunct t, aus dem die Gradtheilung auf πd geschehen kann, und d als Distanzpunct der abfallenden Ebene.

Angenommen, die schiefe Ebene soll in einer Länge von 40 Fuß, gleich ab, abfallen, dann aber wieder in derselben Länge horizontal fortlaufen: so hat man die Grundlinie ab 40 Fuß lang zu machen, die Linien aπ und bπ zu ziehen und bg durch die Theillinie ad zu schneiden. Es ist dann bg gleich ab = 40' und eine Parallele mg mit der Grundlinie schließt die abfallende Ebene.

Zu der Fortsetzung, von mg ab, werden, weil sie mit der Grundebene parallel, die Puncte der Tafel benutzt. Man zieht mP und gP und schneidet sie durch gD in m', wodurch mm' gleich mg = 4 Fuß und die Ebene durch m'g' parallel geschlossen wird.

Um auf die abwärts geneigte Ebene normale Höhenlinien zu stellen, trage man an πD' den rechten Winkel πD'q, wodurch man in dem Durchschnittspunct q der Verticale den Verschwindungspunct für alle dergleichen Höhenlinien erhält. Soll eine solche Höhe, die in q ihren Richtpunct hat, nach einer

gegebenen Länge nr abgetheilt werden, so ziehe man qr' parallel dem Horizont, trage die gegebene Länge in nr und ziehe rr'. Damit ist ns gleich nr gemacht, und senkrecht der schiefen Ebene.

B. Aufgaben, wenn die Durchschnittslinie der schiefen Ebene senkrecht auf die Grundlinie der Tafel steht, die Ebene aber gegen die Grundebene geneigt ist.

156. — **Aufgabe.** Eine Ebene im Bild zu projiciren, welche die beschriebene Lage hat und sich gegen die Grundebene um 30° neigt (Fig. 107).

Ist ac eine mit der Grundlinie der Tafel parallele Linie oder die Hauptgrundlinie selbst, so legt man in a den gegebenen Neigungswinkel cab und erhält dadurch eine, mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallele Richtung in der Tafel. Alle mit ab auf der Ebene parallele Linien sind auch im Bilde parallel, weil sie in allen Puncten der Projectionen geometrisch parallele Linien sind. Die Grenzlinie liegt mit der Grundlinie ab parallel und geht durch den Augenpunct, weil dieser Verschwindungspunct für alle Linien auf der schiefen Ebene ist, die senkrecht der Tafel stehen. Die auf ab stehende geneigte Ebene bildet sich daher in abef.

157. — **Aufgabe.** Es soll in einer dergleichen schiefen Ebene, welche 25° Neigung gegen die Grundebene hat, ein Quadrat gezeichnet werden (Fig. 103).

Man trage an eine, mit dem Horizont parallele Linie mo den gegebenen Winkel mno = 25° und ziehe mit mn die Grenzlinie Ad durch den Augenpunct A, welcher auch Verschwindungspunct für die auf ab rechtwinklichen Linien ac und be ist. Die Distanz AD setze man in Ad, um den Verschwin-

dungspunct für die Diagonale des Quadrats zu erhalten. Man ziehe nun aA und bA, die Theillinie ad, noch ce geometrisch parallel mn, so ist das Quadrat auf der schiefen Ebene ausgeführt. Sollen in den Ecken des Quadrats b,e Höhenlinien errichtet werden, die gleich der Quadratseite sind, so sind diese der Bildebene, daher auch unter sich parallel, und stehen normal der Grundlinie mn. Die Höhe von bb′ ist aber geometrisch gleich ab, die auf e gleich ce.

158. — **Aufgabe**. Man soll senkrechte Ebenen zeichnen, deren Durchschnittslinien mit der Grundebene einen andern Verschwindungspunct, als den Augenpunct haben (Fig. 109).

Der Horizont sei a′PA, PD die Distanz; die Grundlinie ee′, wie auch ad und FF′, soll um *α* von der Verticale abweichen.

Setzt man in D einen Winkel PDA gleich *α*, so ist der Durchschnittspunct A der Verschwindungspunct für die genannten Grundlinien. Wo diese die Grundlinie der Tafel ab′ treffen, in a,e,f errichte man Senkrechte, welches die Durchschnitte der schiefen Ebenen mit der Tafel sind. Die Grenzlinie dieser senkrecht stehenden Ebenen ist die Parallele mit der Verticale PD, geht durch A und ist parallel der Grundlinie ce. Dreht man die Tafel, so daß der Hauptpunct A oberhalb zu liegen kommt, so wird PD der Horizont und man hat die Aufgabe von Ebenen, die gegen die Grundebene geneigt sind. Man trage ferner die Distanz AD von A nach p, so ist p der Hülfspunct, durch welchen man die Grenzlinie qb′ in Grade theilen kann; und AD in AB getragen, gibt den Verschwindungspunct von 45°. Alle in diesen Ebenen mit ee′ parallelen Linien gehen nach dem Verschwindungspunct A. Soll da-

her auf der Ebene gfg'f' ein Quadrat auf der Linie $\alpha\delta$ gezeichnet werden, so zieht man αA, δA und schneidet durch die diagonale Richtung δ**B**.

Will man auf die Ebene ece'c' ein Quadrat senkrecht stellen, dessen Seite hi gegeben ist, so erhält man den Verschwindungspunct a' durch den Schnitt einer Normale auf **AD** in **D**; und um den Theilpunct **O** für die Höhen hl und ik zu erhalten, zieht man **a'O** parallel **PD** und trägt **a'D** in **a'O**. Alle Linien, die auf den gezeichneten Ebenen senkrecht stehen, haben ihren Richtpunct in a', so ik und hl, und aus **O** werden sie in bestimmter Länge geschnitten; so ist hier ik gleich ih gemacht und die Ergänzung des Quadrats hikl gehörig eingeleitet.

Hätte man auch auf der letztgenannten Ebene mehre Winkel zu zeichnen, so trage man die Distanz **a'D** aus **a'** in w; dieses ist der Hülfspunct, um die Grenzlinie **a'o** in Grade zu theilen.

159. — **Aufgabe.** Man soll die Linie finden, in der sich zwei verschiedene Ebenen schneiden (Fig. 2).

Die Ebenen seien **acdg** und **APC**; von ersterer ist die Grenzlinie **R**π, von der andern **Pq**. Der Neigungswinkel von acdg mit der Grundebene sei **cab**; aus der Lage der Begrenzungslinien der Ebene **cbde** sieht man, daß sie senkrecht und parallel der Tafel steht. **CAB** ist der Neigungswinkel der Ebene **PCA** gegen die Grundebene.

Die Ebene **PCB** steht senkrecht auf dem Horizont, denn **CB** ist normal, daher parallel mit ed

╪

und **bc**, und **PC** mit **PB** p. Der Durchschnitt der senkrechten Ebenen cbed und **PCB** ist die Linie ei. Nun ist in der senkrechten Ebene **PCB** ed parallel **CB**, ag schneidet **BP** in g; verbindet man d mit g, so ist deg ein rechtwinklich stehendes Dreieck in

dieser Ebene. Die Linie dg schneidet Pc in h; dg liegt ebenfalls in der Ebene cagd, und ag schneidet PA in F, folglich liegen beide Puncte h und F, sowohl in der Ebene cagd als auch in der PCA. Daher muß die Durchschnittslinie beider Ebenen in der Linie hf liegen.

Verlängert man die gefundene Durchschnittslinie nach der Grenzlinie πR der schiefen Ebene, so trifft sie in den Punct k, wo beide Grenzlinien sich schneiden.*)

Daraus geht denn das practische Verfahren hervor, daß, um die Durchschnittslinien beider Ebenen zu finden, man, sobald man einen der gemeinschaftlichen Puncte F oder h kennt, diesen mit dem Durchschnitt der Grenzlinie verbinde. Dieses stimmt auch in Beziehung auf die horizontale Ebene und die schiefe Ebene PCA, wo P der Durchschnitt der Grenzlinien ist, und daher die Durchgangslinie beider Ebenen in AP liegt. Bei parallelen Grenzlinien liegen auch die Durchgangslinien ihnen parallel, wie af parallel Pp und Rπ ist, in Bezug auf die Grundebene und der schiefen aπhf.

Diese Regeln sind einfach auszuführen und haben Geltung bei je zwei beliebigen Ebenen.

Drittes Kapitel.

Doppelt schiefe Ebenen, und Linien und Flächen auf denselben.

160. — **Aufgabe.** Man soll in der Grundebene ApF eine doppelt schiefe

---

*) Es verschwinden nemlich beide Ebenen in ihren Grenzlinien, und da die Durchschnittslinie hf beiden Ebenen gemein ist, so muß ihr Verschwindungspunct ebenfalls in dem Puncte liegen, den beide Grenzlinien gemein haben.

Ebene zeichnen, deren Durchschnittslinie mit der Grundlinie der Tafel AB ist, und von ihr ab mit einer Neigung von α^0 ansteigt (Fig. 102).

P sei der Augenpunct, PD die Distanz und p der Verschwindungspunct der Durchgangslinie der schiefen Ebene in der Grundebene.

Man verbinde pD, lege an pD einen rechten Winkel pDc und verlängere den Schenkel bis zu dem Durchschnitt c.

Es ist dann cA die Durchschnittslinie einer senkrechten Ebene mit der Grundebene, an welche der gegebene Neigungswinkel α aufgetragen werden kann, weil dessen Schenkel auf der Durchschnittslinie dieser Ebenen normal stehen müssen.

Zu Aufsuchung der Grenzlinie fälle man durch c eine Senkrechte eE auf den Horizont. Diese Senkrechte läßt sich als Grenzlinie und der Punct c als Hauptpunct, der Abstand cD als Distanz dieser senkrechten Ebene betrachten, welche um den Winkel cDP von der Verticalen abweicht. Trägt man cD in cd auf den Horizont, so ist in d der Hülfspunct gefunden, welcher zu Auftragung des Gradmaßes auf eE nöthig ist. Setzt man sonach in d den gegebenen Neigungswinkel cde $= \alpha$ und verlängert dessen Schenkel nach e, verbindet diesen Durchschnittspunct mit A, so ist auch der Winkel cAe $= \alpha$. Dadurch ist in e ein Punct der Grenzlinie gefunden, die zugleich durch p gehen muß. Auf diese fälle man aus P eine Normale Pπ und verlängere sie nach I; sie bestimmt in π den Hauptpunct. In dem Augenpunct errichte man eine Normale PK, gleich der Distanz PD und ziehe πK, so erhält man in KπP den Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Tafel und in πK die Distanz (oder den Abstand des Auges von π) der schiefen

Ebene, die man in πo trägt, um den Hülfspunct für die Grenzlinie ep zu erhalten.

Ist **EF** die Grundlinie der Tafel, welche in A von der Durchgangslinie **Bp** getroffen wird, dann ist eine Parallele **AH** mit der Grenzlinie πp die Grundlinie der schiefen Ebene in der Tafel, auf welcher die Maße wie auf **EF** geometrisch gelten.

Hiermit sind alle Hülfslinien und Puncte projicirt, welche zu Zeichnung von Linien und Flächen auf einer doppelt schiefen Ebene von dieser Lage erforderlich sind und es können nun folgende Aufgaben gelös't werden.

161. — **Aufgabe.** Es sei das Dreieck **MOT** gegeben, man soll es auf die doppelt schiefe Ebene **BAC** perspectivisch zeichnen (Fig. 112).

Wir stellen das Beispiel auf, um daran zu zeigen, wie man mit Hülfe des Grundrisses die perspectivische Projection des Dreiecks auf der schiefen Ebene zeichnen kann.

Es sei nach der gegebenen Anleitung die Grenzlinie **EE'**, der Hauptpunct π, die Distanz π**E** gleich π**G** gefunden; **BA** sei die Grundlinie der schiefen Ebene.

Man zeichne den Grundriß in die Lage gegen die Grundlinie **AB**, als wäre sie die Grundlinie der Tafel, und operire ganz so, wie § 44 erklärt worden. Man ziehe aus den Puncten **M**, **O** und **T** Senkrechte nach **AB**, aus den Durchschnittspuncten **N**.... Gesichtslinien nach π, trage die Ordinaten **MN**.... aus **N** nach **Q**,.... und ziehe die Theillinien **QE**....; der Durchschnitt **m** ist dann das Bild von **M**, **t** das von **T** ꝛc. auf der schiefen Ebene, und das Dreieck im Bild **mto** gefunden. Man sieht hieraus, daß die Grenzlinie mit ihren

Verschwindungspuncten dasselbe leistet, wie der Horizont und dessen Puncte für die Tafel.

Aehnlich operirt man aus dem Grundriß bei Ebenen (Fig. 104), deren Durchgangslinie mit der Horizontalebene parallel der Grundlinie ist, die Ebene aber eine Neigung gegen die Tafel hat. In diesem Fall, wenn **AB** diese Durchgangslinie, **SE** die Grenzlinie, **S** der Hauptpunct und **P** der Augenpunct ist, die Ebene, welche den gegebenen Punct enthält, vorgerückt gedacht wird, bis sie mit der Grundlinie der Tafel zusammentrifft, und dann herabgeschlagen sei: so zieht man **MN** normal der Grundlinie **TR**, trägt die Ordinate **MN** in **NL** und zieht die Gesichtslinien **NP** und **LP**. Dadurch ist **NL** auf die Grundlinie der schiefen Ebene in **X** und **Y** übertragen. Man zieht nun ferner **XS**, **YS** und schneidet erstere durch die Theillinie **YE'**; der Durchschnitt m gibt das Bild des Punctes M auf der schiefen Ebene in Perspective.

162. — **Aufgabe.** Man soll aus dem Punct i eine Richtung ziehen (Fig. 102), die von der Verticalen der schiefen Ebene 50° abweicht. Man setzt an den Hülfspunct o den verlangten Winkel in πon und zieht die Richtung in. Sowie on als Richtung von 40° ihren Verschwindungspunct in n hat, so haben alle anderen Linien der schiefen Ebene von gedachter Abweichung denselben Verschwindungspunct n.

163. — **Aufgabe.** An die Richtung in soll in i ein rechter Winkel construirt werden. Zieht man on und macht den Winkel nom gleich 90°, so werden alle Normalen auf den in § 162 gegebenen Richtungen in den Punct m laufen; ebenso im, daher ri rechtwinklich auf in in Bezugauf die gezeichnete doppelt schiefe Ebene sein.

164. — **Aufgabe.** Soll die Richtung im nach einem Maße ie abgeschnitten werden, so trage man mo in mt der Grenzlinie und bestimme dadurch den Theilungspunct für alle diejenigen Linien, welche in m verschwinden, d. i. $\stackrel{+}{\text{P}}$ ir sind. Zieht man nun die Theillinie it, so schneidet diese in ri das Maß ie ab.

So ist δ der Theilungspunct für alle Linien der schiefen Ebene, deren Verschwindungspunct π ist, d. i. für solche, die auf der Grundlinie **HA** senkrecht stehen.

164a. — Der Punct **I** ist der Verschwindungspunct für alle Höhenlinien, die in beliebigen Puncten auf der gedachten schiefen Ebene senkrecht stehen, wie z. B. die Höhenkanten eines Würfels. Man findet **I**, wie beschrieben, wenn man an die Distanzlinie π**K** einen rechten Winkel π**KI** legt. Der Theilpunct für dergleichen Höhen liegt auf der Parallele **Ix** in einem Abstand von **I**, der gleich **IK** ist.

Diese perspectivischen Puncte müssen nothwendig mit veränderter Lage der schiefen Ebene eine andere Stellung bekommen, während die Hauptpuncte der Tafel unverändert bleiben. Uebrigens sieht man leicht, daß das Verfahren, auf doppelt schiefen Ebenen Winkel und Figuren zu zeichnen, von dem auf einfach schiefen Ebenen nicht abweicht, sobald die Grenzlinie und die Verschwindungspuncte gehörig bestimmt worden; und man kann es einfach auf die Operationen auf der senkrechten Tafel zurückführen.

165. — **Aufgabe.** Die Grundlinie **bc** der schiefen Ebene liege in **bc**, deren Grenzlinie sei **pp′** und π der Hauptpunct; die Distanz der Tafel ist **PG**, die nöthigen Hülfspuncte sind, wie beschrieben, bestimmt worden. Man soll auf der doppelt-

schiefen Ebene einen Kreis vom Mittelpunct m zeichnen.

Man ziehe die Richtung πm bis an die Grenzlinie der schiefen Ebene in m'. Von m' nach n' und r' setze man das gegebene Maß des Halbmessers, und nehme n'n'' gleich $r'r'' = \frac{3}{10}$ r'm', nach § 103; ziehe r'a, r''a, m'a, n''a, n'a und durch m, und den Distanzpunct p' der schiefen Ebene die Richtung p'm, wodurch man die nöthigen Puncte zum Einzeichnen des Kreises erhält, wovon r und n die Endpuncte des Durchmessers sind.

166. — **Aufgabe.** Auf derselben schiefen Ebene ist das Bild des Sechsecks zu zeichnen, dessen Grundriß in ab...ef gegeben ist (Fig. 113).

Das Verfahren ist bereits aus § 107 und 108 bekannt, man bemerke nur, daß die Ordinaten d1, e2, c3... senkrecht auf die Grundlinie der schiefen Ebene und aus den Durchschnittspuncten 1,2,3... Gesichtslinien gezogen sind. Die Gesichtslinien werden nach π gerichtet, die Ordinate d1 nach $1d^o$, e2 nach $2e^o$ .... a5 nach $5a^o$ übergetragen und aus a^o, b^o, c^o ... die beziehlichen Gesichtslinien geschnitten.

167. — **Aufgabe.** Man soll in den Puncten m und m' Höhenlinien errichten, welche normal auf der schiefen Ebene stehen.

Der Verschwindungspunct R für dergleichen Linien sei, wie bekannt, gefunden. Man ziehe daher Rm und Rm', so sind dies die verlangten Richtungen auf dieser Ebene.

Um auf ihnen eine bestimmte Länge abzuschneiden, suche man den Punct t auf gewöhnliche Weise, indem man Rt parallel der Grenzlinie und gleich RG zieht; und wenn man NM parallel mit der Grenzlinie legt, die Linie tm bis M verlängert und

das gegebene Maß von M nach U setzt und Ut zieht, so schneidet diese die Senkrechte in u nach dem verlangten Maße.

Den Punct N findet man, wenn man aus dem Fußpunct der Gesichtslinie mm' eine Normale m'N auf die Grundlinie bc errichtet und diese aus R durch m schneidet.

168. — **Aufgabe.** Das Bild FF' der Durchschnittslinie zu finden, in welcher die schiefe Ebene die wagerechte Grundebene hinter der Tafel schneidet.

In diesem Fall liegt die Grundlinie der schiefen Ebene unter der Grundlinie BC der Tafel. Man ziehe aus einem beliebigen Puncte x eine Normale auf die Grundlinie bc bis zur Grundlinie der Tafel oder deren Verlängerung in x', dann Px'; den Durchschnitt von Px' mit πx, nemlich F, verbinde mit dem Durchschnitt der beiden verlängerten Grundlinien F', so ist FF' das Bild des Durchganges der schiefen Ebene in der wagerechten Grundebene der Tafel.

Umgekehrt läßt sich leicht die Durchgangslinie der schiefen Ebene finden, wenn man durch einen beliebigen Punct F des Bildes der Grundlinie die Linien πFx und Pfx' zieht, wo die letztere die Grundlinie BC der Tafel in x' schneidet. Durch den Durchschnittspunct x' ziehe man x'x parallel πP, so gibt der Durchschnitt x einen Punct der Grundlinie cb, und eine Parallele mit der Grenzlinie durch x die Durchschnittslinie selbst.

169. — **Aufgabe.** Die horizontale Projection auf der Grundebene einer Figur der schiefen Ebene zu finden (Fig. 114).

Wir wählen zur Auflösung das in Fig. 113 construirte Sechseck, indem wir nur die nöthigsten Beziehungen aus dieser Figur entnehmen, damit die

Linien sich nicht überhäufen. Man will die Fußpuncte bestimmen, in welchen Senkrechte aus den Ecken a'b'c'... die Grundfläche treffen und verbunden die horizontale Projection der Figur geben. Man ziehe Gesichtslinien durch π und die Ecken bis an das Bild des Durchschnitts FF' und aus den Durchschnittspuncten a^0, b^0, c^0.... dergleichen nach P. Die Winkel $\pi a^0 P$, $\pi b^0 P$, $\pi c^0 P$... sind Neigungswinkel der schiefen Ebene mit der Grundebene. Aus den Ecken der Figur ziehe man Parallelen mit der Verticale PV, indem die Ordinaten normal auf der Grundebene stehen, bis an die beziehlichen Durchschnitte mit den Gesichtslinien Pa^0, Pb^0..., so hat man die Fußpuncte 1,2,3,4..., folglich auch das Sechseck gefunden, wie es sich im perspectivischen Bilde auf der Grundebene darstellen würde. Man sieht, daß zu Ausführung dieser Projection das Bild FF' der Durchschnittslinie nach § 168 zuerst gefunden werden muß.

170. — Noch verwandt mit dem Vorgetragenen ist die Lehre von der Spiegelung, wir halten uns deßhalb berechtigt, sie unmittelbar folgen zu lassen. Deren Anwendung findet mehr bei Malereien, als bei architectonischen Zeichnungen statt.

Sechster Abschnitt.

Von dem Widerschein auf spiegelnden Ebenen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erläuterungen.

171. — Das Licht, welches auf polirte Flächen, Spiegel, Wasser rc. auffällt, wird zum Theil regel=

mäßig zurückgeworfen, zum Theil zerstreut. Je vollkommener die Politur, desto mehr regelmäßige Zurückwerfung, desto weniger Zerstreuung. Daher werfen vollkommen polirte Ebenen Bilder schärfer und klarer zurück, als weniger polirte, das ruhigere Wasser deutlicher, als bewegtes.

172. — Eine solche polirte Ebene sei **ABC**, **LC** eine Normale darauf (Fig. 118), **CM** ein auffallender, **CN** ein zurückgeworfener Strahl. Dabei haben folgende Beziehungen statt:

1. die Normale **LC** und die Strahlen **CM**, **CN** liegen in einerlei Ebene, welche senkrecht auf der spiegelnden Ebene steht.

Den Punct **C** nennt man den Einfallspunct, die Normale **LC** das Einfallsloth, den Winkel **NCL** den Einfalls- oder Incidenzwinkel, den **MCL** den Zurückwerfungs- oder Reflexionswinkel.

2. Der Einfallswinkel **NCL** ist stets gleich dem Zurückwerfungswinkel; jeder liegt auf einer entgegengesetzten Seite des Einfallslothes. Daher sind auch die Complementswinkel **MCA** und **NCB** gleich und jeder senkrecht auffallende Strahl geht in sich selbst zurück.

173. — Ist **CD** ein ebener Spiegel, **P** ein strahlender Punct vor demselben und in **O** das Auge des Zuschauers (Fig. 119), so wird nach obigen Gesetzen, unter den übrigen divergent ausgehenden Strahlen, gewiß auch ein Strahlenbüschel unter solchem Winkel auf die Spiegelfläche fallen, daß seine Rückstrahlung unter gleichem Winkel das Auge trifft, wo dessen Grundfläche die Pupille ist. Die Verlängerung der Strahlen vom Auge ab wird sich nothwendig in **P'** vereinigen, und da das Auge nur in die Richtung **OB** und **OA** sieht, nicht aber den strahlenden Punct wahrnimmt, so kommt ihm

der Eindruck, als läge das **Bild** von P in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunct aller Strahlen P'. Aus der Congruenz der Dreiecke vor und hinter dem Spiegel AC folgt, daß PC gleich CP' oder daß das Bild eines strahlenden Punctes soweit scheinbar hinter dem Spiegel liegt, als der Punct selbst vor demselben.

174. — Bei mehren strahlenden Puncten entsteht zu jedem Punct ein optisches (Spiegel-) Bild (Fig. 120), welches zu ihm die angegebene Lage hinter dem Spiegel hat. Ein Gegenstand, als Aggregat von Puncten, muß daher im Spiegel ein Bild gleicher Größe zeigen, welches gegen die Hinterfläche des Spiegels so liegt, wie der Gegenstand selbst gegen die Vorderfläche.*) Der Endpunct **a** des Kreuzes wird auf der spiegelnden Ebene AB in **a'**, der Punct **b** in **b'** reflectirt. Dem Auge in **O** erscheint das Spiegelbild von a in a'', von b in b'', es sieht also das Bild im horizontalen Spiegel verkehrt; ebenso wenn der Gegenstand horizontal, der Spiegel senkrecht ist.

Ist der Spiegel unter 45° gegen die Grundebene geneigt, so werden senkrechte Gegenstände horizontal, dagegen horizontale Gegenstände senkrecht erscheinen. Uebrigens werden Gegenstände der rechten Hand, dem Spiegelbild zur linken, und so umgekehrt, liegen.

Aus dem Vorstehenden erhellet, daß Puncte und überhaupt Gegenstände eben so weit hinter der spiegelnden Fläche gezeichnet werden müssen, als sie sich

---

*) Bei Glasspiegeln entstehen leicht **zwei** Bilder, von denen das hellere durch Reflexion von der Hinterfläche, das schwächere durch die Vorderfläche entsteht.

Sie sind immer um die doppelte Dicke des Glases von einander entfernt. Metallspiegel, Wasserebenen, polirte Flächen geben nur **ein** Bild.

vor derselben wirklich befinden. Es läßt sich daher folgende allgemeine practische Regel feststellen:

Wir finden das Spiegelbild eines Punctes, wenn wir von ihm eine Normale auf die Spiegelfläche fällen und diese in gleicher Länge hinter die reflectirende Ebene verlängern.

Zweites Kapitel.

Bilder in horizontalen Spiegeln (Wasserspiegelung).

175. — Obgleich die Gesetze der Spiegelung im Wasser die nemlichen sind, wie die bei Spiegeln, und nur der Fall berücksichtigt werden muß, daß die spiegelnde Fläche horizontal liegt, so wollen wir doch, der größern Einfachheit wegen, den Widerschein im Wasser, der mit dem auf horizontalen polirten Ebenen oder wagerechten Spiegeln gleichbedeutend ist, zuerst abhandeln.

Ist AE der Wasserspiegel (Fig. 121), AB ein über demselben vorragender senkrechter Pfahl, so ist dessen Verlängerung unter dem Spiegel, die man gleich AB gemacht hat, das Bild des Pfahls im Wasser.

Der Pfahl CD über dem Wasser habe eine gleiche, aber schräge Stellung. Hier muß nothwendig der Endpunct D im Bilde senkrecht unter dem Wasser zu liegen kommen, so daß D'E gleich DE wird. Durch Bestimmung des Punctes D' aber ist auch die Richtung CD' und somit das Bild im Wasser gefunden, welches seinen Anfang nur in C haben kann.

176. — **Aufgabe.** Die Wasserlinie SS' schneidet das gleichabfallende Ufer und die Brücke

(Fig. 122). Auf dem Ufer steht der Pfahl so, daß das Ufer von seinem Fuß m ab senkrecht über SS' abgestochen ist. Die andern Pfähle B,C,D stehen auf einer Linie mn, die senkrecht der Tafel liegt, also in dem Augenpunct P verschwindet. Da die Verlängerung mA' den Wasserspiegel in A' trifft, so müssen die andern Verlängerungen auf das Wasser in eine Linie treffen, die ebenfalls von A' aus nach P läuft, nemlich in B', C' und D'. Von dieser Linie aus hat der Widerschein im Wasser die Länge der über ihr befindlichen Höhen, und es ist A'A = A'a, B'B = B'b &c. zu machen, um die Zeichnung des Widerscheins zu ergänzen. Da hier die Pfähle über mn gleiche Höhe haben, also mit der Augenlinie AP abschneiden, so wird auch im Wasserbild die Linie aP die Höhen beiläufig bestimmen.

Das Bild des Ufers wird auf gleiche Weise gefunden, und da der Pfahl D bedeutend nach dem Hintergrunde zurückweicht, so wird C größtentheils vom Widerschein des Ufers, D aber ganz davon verdeckt, und kann im Bilde nicht wahrgenommen werden.

Bei der Brücke ist das Niveau des ersten Bogens ACB die Linie SS'. In ihr liegt folglich der Mittelpunct E, aus welchem man mit dem Halbmesser EC den Bogen AFB als Bild im Wasser zu beschreiben hat. Der Bogen GIH steht auf der Wasserlinie GH und hat seinen und seines Bildes Mittelpunct in J, so daß auch hier JK = JI ist.

Um die Fußpuncte der Platte QRLM, welche über die senkrechte Ebene ABLM ausladet, zu finden, fälle man aus L und M Senkrechte auf das Niveau AB, ziehe die Gesichtslinien NS und OT und schneide sie durch Senkrechte aus Q und R. Die Puncte N,O,S,T sind es, aus denen die Längen NL, QR auf die beziehliche Verlängerung der gedachten Nor-

malen aufzutragen ist, wodurch der Widerschein ausgeführt werden kann, wenn man noch die Senkrechten aus a und b zieht. Die Höhe der Platte ist der im Bilde gleich.

Der Stab O steht in Mitten der Brückenbahn. Zu Bestimmung seines Fußpunctes auf der Fläche des Widerscheins ziehe man die Gesichtslinie O'p bis zur Oberkante der hintern Brückenseite, fälle die Normale bis an diese Kante im Bilde und ziehe die Gesichtslinie qr. Diese schneidet auf der Senkrechten aus O' den Fußpunct in r ab, und man hat nur noch rO'' gleich OO' zu machen, um auch dieses Bild zu erhalten.

177. — Gegenstände am Himmel, wie Wolken, der Mond ɪc., spiegeln sich im Wasser stets in gleichem Abstand unter dem Horizont, in dem sie über ihm zu stehen scheinen. Der Widerschein kann daher durch die Senkrechte aus ihnen und den Gesichtswinkel bestimmt werden, dessen Schenkel vom Auge nach dem Horizont und jenem Gegenstand gehen. Der Grund hierzu ist in der großen Entfernung von dergleichen Objecten zu suchen, die mit der ungemessenen Entfernung des Horizonts ziemlich im Einklang steht.

Hingegen müssen Gegenstände, welche in gemessener Ferne in der Luft schweben, z. B. Vögel, nach der Regel im Bilde gezeichnet werden, daß man aus der Stelle des Vogels L' eine Senkrechte fällt (Fig. 122), den Ort, wo diese das Niveau des Wassers oder die Grundebene treffen würde (M'), markirt und M'N' gleich M'L' macht. Der Ort, über welchem der Vogel I' schwebt, ist J', und weil I'J' = J'K', so ist K' dessen Widerschein im Wasser.

178. — Nachdem wir die Anwendung der Spiegelungsgesetze im Wasser ziemlich ausführlich

gezeigt haben, wollen wir sie im Folgenden nochmals übersichtlich zusammenfassen:

1) Jeder Punct des Widerscheins liegt mit dem correspondirenden Puncte des Gegenstands in geometrischer Senkrechten.

2) Der Abstand eines Punctes des Körpers vom Wasserspiegel ist gleich dem Abstand seines Widerscheins von diesem Wasserspiegel.

3) Alle wagerechten Linien des Körpers haben mit den zugehörigen Linien des Widerscheins gemeinschaftliche Vertiefungspuncte.

179. — Folgende Aufgaben werden dienen, den Gebrauch dieser Sätze noch anschaulicher zu machen.

Aufgabe. In der Wasserfläche steht der Körper ACn, der von dem Niveau in dem Querschnitt ABC getroffen wird (Fig. 123). Man verlängere die Kanten Aa', Bb', Cc'..., mache die Verlängerungen gleich den zugehörigen Höhen und construire im Wasserbilde die Grundebene a'b'c'd', wozu der Distanzpunct D benutzt werden kann.

Man suche die Fußpuncte der Senkrechten aus den Kanten der Platte, wo diese nemlich das Niveau des Wassers treffen, hier MNOP. Da die Platte quadratisch ist, so kann die Lage der Fußpuncte mittelst der Theillinien nach den Distanzpuncten durch die Puncte A,C oder B,D leicht bestimmt werden. Von diesen Fußpuncten aus mache man die Höhen über und unter ihnen gleich und ergänze dann die Spiegelfigur.

Die Linie M'N' ist die Begrenzungslinie des Niveau's; auf offenem Meere würde dafür der Horizont O'D' eintreten.

180. — **Aufgabe.** Nach dem bereits Vorgetragenen wird sich keine Schwierigkeit beim Zeichnen des Widerscheins der hier und in Fig. 125 gegebenen Gegenstände finden (Fig. 124 und 125). Die

Richtung des schrägliegenden Baumstammes **A** ist **BC**, die Höhe des Gestades **CD**; das Niveau des Wassers bezeichnet die Linie **XY**. Die Tiefe des Widerscheins **DF** ist gleich **DE**. Aus **F** wird die Linie **FH** gezogen, deren Endpuncte in **F** und **H** bestimmt sind, und die mit **EK** in einem Punct von **XY** zusammentrifft. Die Puncte **L,M,N** zeigen die Fußpuncte an, aus welchen die Ecken der Grundfläche des Steins im Spiegelbild erhalten werden 2c.

In Figur 125 darf man nur die Kantenlinie **AB** verlängern und das geometrische Profil bei **A** aus **C** nach **D** übertragen, aus welchem sich das Ganze nach den bekannten Regeln mit Leichtigkeit ausführen läßt.

Alle Körper, deren Widerschein nicht außerhalb des Bildes derjenigen Körper fällt, welche dem Ufer näher liegen, geben kein Spiegelbild auf dem Wasserspiegel; daher sieht man von der Staude am Stein nur die Spitze, das Uebrige deckt das Bild der Ufermauer.

Drittes Kapitel.

Von den Bildern spiegelnder Flächen in verschiedenen Stellungen.

181. — Eine spiegelnde Fläche kann 5 verschiedene Stellungen gegen die Projectionstafel oder die Grundebene haben. Sie kann:

1) mit der Grundebene parallel liegen. Diesen Fall haben wir bereits in dem Vorigen abgehandelt und namentlich auf den Wasserspiegel angewandt
2) mit der Tafel parallel liegen;
3) senkrecht auf die Grundebene und zugleich senkrecht auf die Tafel stehen;

4) senkrecht auf die Horizontalebene, aber geneigt der Tafel und endlich
5) weder zur Tafel noch zu der Grundebene senkrecht stehen, wo sie dann eine doppelt schiefe Ebene bildet.

Versinnlichen wir uns diese Stellungen durch die Wände eines Zimmers, wo das Auge senkrecht auf die Hinterwand blickt, so befindet sich der Spiegel im zweiten Fall an der Hinterwand und in deren Ebene. Der dritte Fall setzt den Spiegel an eine der Seitenwände. In dem vierten Falle schneidet die Spiegelebene, gehörig verlängert, eine Seiten- und die Hinterwand in senkrechten Linien, und in dem fünften Fall ist der Spiegel in seiner vierten Stellung noch nach vorn oder hinten gegen die Grundebene geneigt.

182. — Jeder dieser Fälle hat seine besonderen Beziehungen gegen die perspectivischen Hauptpuncte und Linien, welche in dem Kapitel von den schiefen Ebenen hinreichend abgehandelt sind, worauf wir hier im Allgemeinen verweisen und nur die hauptsächlichern in dem Folgenden anführen.

In dem ersten Fall ist der Horizont, Augenpunct und die Distanz der Tafel unverändert auch die der spiegelnden Flächen; alle rechtwinklich zurückweichenden Linien verschwinden in dem Augenpuncte; alle parallel mit der Tafel laufenden bleiben parallel mit dem Horizont.

Im zweiten Falle gelten die nemlichen Beziehungen; alle senkrecht stehenden Linien bleiben (wie auch im 1. Fall) auch im Bilde senkrecht. Tritt dagegen der untergeordnete Fall ein, daß der Spiegel nach vorn oder hinten geneigt wird, dann verrückt sich der Horizont des Spiegelbildes parallel über oder unter den Horizont der Tafel und hat seine eigenen Cardinal- (Haupt-) puncte. Hori-

zontallinien des Objects bleiben auch im Bilde parallel dem Horizont; Linien, die im Augenpunct verschwinden, laufen in dem Bilde in dem Hauptpunct auf dessen Grenzlinie aus ꝛc.

Bei dem dritten Falle verschwindet die Grundlinie des Spiegels und alle ihr parallelen Linien in dem Augenpunct; alle Horizontalen bleiben auch im Spiegel dem Horizont parallel und die Lothrechten behalten im Bilde die normale Richtung.

Weicht dieser Fall dahin ab, daß der Spiegel in dieser frühern Stellung vor- oder rückwärts gegen die Grundebene geneigt wird, so dreht sich der Horizont um den Augenpunct und mit dieser Grenzlinie laufen dann alle Horizontalen des Spiegelbildes geometrisch parallel, alle Senkrechten stehen geometrisch senkrecht auf diesen.

Der vierte Fall bedingt für die Grundlinie des Spiegels einen besondern Verschwindungspunct auf dem Horizont, folglich auch einen zugehörigen Hauptpunct, in welchem alle Linien des Bildes verschwinden, die in dem Object nach dem Augenpunct gehen. Senkrechte Höhenlinien verändern auch im Bilde ihre normale Stellung nicht.

Wird in dieser Stellung der Spiegel gegen die Grundebene geneigt, so tritt der fünfte Fall ein, der Spiegel wird zur doppelt schiefen Ebene, deren verschiedene Beziehungen hier nicht wiederholt werden können. Wir wollen diese verschiedenen Fälle durch einfache Aufgaben erläutern, welche für die Praxis des Zeichnens genügen werden, weil sie selten verwickelter vorkommen.

183. — **Aufgabe.** Der Spiegel stehe senkrecht und parallel der Tafel (Fig. 126).

Zu Vereinfachung der Auflösung nehmen wir an, die ganze Hinterwand des Zimmers sei eine Spiegelfläche und mn deren Grundlinie, wo sie mit

dem Fußboden zusammenstößt. Man ziehe aus jedem Puncte, der zur perspectivischen Construction des Spiegelbildes nöthig scheint, Normalen nach der Grundlinie des Spiegels, die hier den Augenpunct zum Verschwindungspuncte haben, wie aA, eA.... Verlängerungen derselben in das Bild geben auch hinter dem Spiegel die correspondirenden Augenlinien. Um einen Punct a im Bilde abzuschneiden, d. i. den Abstand von der Grundlinie bd, dem ab gleich zu machen, zieht man die Theillinie aD' zur Grundlinie in m und von m aus eine andere nach D'', die auf aA den verlangten Punct abschneiden wird. So verfährt man mit jedem andern zu bestimmenden Puncte.

Obgleich der geöffnete Flügel der Thür die Thüröffnung dem Auge verdeckt, so wird sie doch im Spiegel sichtbar und durch sie zeigen sich vielleicht noch Gegenstände des Nebenzimmers. Wir haben daher die Thür mit ihrem Gevierte vollständig im Spiegel zu zeichnen, den Thürflügel nach der gegebenen Regel zu projiciren und nöthigenfalls den sichtbaren Theil der Objecte im Seitenzimmer zu bestimmen.

Das Bild der Thür behandelt sich so, als wenn in der verlängerten Wand eine zweite Thür vorhanden wäre, welche so weit von der Hinterwand abstände, als die vordere Thür von derselben, oder als wäre die Hinterwand entfernt und die Ebene der Seitenwand verlängert. Zu Bestimmung des Thürflügels braucht man nur den Punct e in den Spiegel zu zeichnen, wodurch das Uebrige sich leicht ergibt. Cassettirung der Decke, Täfelung des Fußbodens sind, ihrer Lage im Bilde nach, Fortsetzung der vor dem Spiegel liegenden.

Malereien und andere Gegenstände an der Wand sind auf ähnliche Weise wie die Thür im

Spiegelbild zu entwerfen. Höhen, wie aa', schneiden sich durch Gesichtslinien ab.

Der Stab qr steht mit seinem Fuß auf dem Punct q und lehnt sich gegen den Spiegel in r. Dem Punct q entspricht q' im Bilde, weil qr' = r'q' und qq' Augenlinie ist. In r muß aber das Bild mit dem Ende des Stabes zusammentreffen, weil dessen Abstand vom Spiegel gleich Null ist, oder die Senkrechte rr' gemeinschaftlich ist.

Steht der Spiegel nicht unmittelbar auf der Grundebene, so hat man demungeachtet die Bilder vollständig zu zeichnen, als wenn derselbe den ganzen Raum ausfüllte, und dann nur den Theil davon aufzunehmen, der in die Einrahmung des Spiegels fällt.

184. — Bevor wir zu einer andern Aufgabe übergehen können, wird es nöthig, einen Satz aus der Katoptrik zu berühren, der für das Folgende in öftere Anwendung kommt.

Es sei Fc eine Horizontale (Fig. 127), die auf der Grundlinie eines Spiegels cg in c senkrecht steht; in p befinde sich das Auge, und der Spiegel sei um den Winkel hcg = α von der normalen Stellung ab dem Auge zu geneigt. Wäre der Spiegel senkrecht, so würde das Bild des Punctes F hinter den Spiegel in a fallen; durch dessen Neigung aber erhebt es sich um einen Winkel acn, der gleich 2·hcg = 2α ist, oder um den Bogen an. Denn bei bleibender Stellung des Auges p muß das Bild des Punctes F in i fallen, wo der Auffallungswinkel dem Reflexionswinkel, oder gleichviel, der Winkel gip dem Winkel Fic gleich ist. Desgleichen muß, wie immer, der Spiegelpunct in der Verlängerung von pi liegen und cn gleich cf sein, wodurch sich seine Lage in n bestimmt.

Nun läßt sich analytisch erweisen, daß der Erhebungswinkel des Spiegelpunctes a das Doppelte von dem Neigungswinkel des Spiegels ist.*) Fällt aber das Bild des Punctes a als Endpunct der Linie cf in n, so muß auch cn das Spiegelbild von cf sein.

185. — **Aufgabe.** Es liegt die Grundlinie IK des Spiegels IKMN parallel der Tafel und der Spiegel ist um $16\frac{1}{2}^0$ gegen den Zuschauer geneigt (Fig. 128).

Der Horizont der Tafel ist in D'P mit den Distanzpuncten D' und D'' gegeben, und nach dem vorigen § ist die Erhebung der Horizontalebene im Spiegel um $2 \cdot 16\frac{1}{2}^0 = 33^0$ zu berücksichtigen. Diesen Winkel setzen wir an D'P in DP'π und schneiden damit auf der verlängerten Verticale in π den Hauptpunct für die geneigte Ebene, ziehen $\pi\delta$ parallel dem Horizont und machen πD' gleich $\pi\delta$; errichten wir noch in D' den rechten Winkel πD'p, so sind die nöthigen Hülfslinien gefunden, und es ist für die schiefe Ebene $\pi\delta$ die Grenzlinie, $\pi\delta$ die Distanz, p der Hülfspunct.

Der Punct C z. B. wird nun im Spiegel gefunden, daß man die Augenlinie CP, d. i. aus C eine perspectivische Normale auf die Grundlinie JK zieht, den Durchschnittspunct F' mit dem Hauptpunct π verbindet, wodurch im Spiegel F'π senkrecht auf der Grundlinie wird, dann F'c gleich F'C macht.

---

*) Setzen wir nemlich $\llcorner$nfc = x, so ist, wegen der gleichschenklichen Dreiecke cnk und cfk, cg normal nf, also $\llcorner$ckf = R, der $\llcorner$icf = R — x;

Der rechte Winkel hcf besteht aber aus den Winkeln icf + hcg, d. i. R — x + α = R

woraus folgt: α = x = dem Neigungswinkel.

Es ist nun der Winkel nfa ein Winkel der Peripherie und der Winkel nca der zugehörige Winkel am Mittelpunct, daher $\llcorner$nca = 2$\llcorner$ nfa = 2x = 2α.

Der Punct c ist dann das Spiegelbild von C. Da die verkürzte Linie F'C nicht wirklich gemessen werden kann, so trägt man deren Länge perspectivisch auf Fπ über, indem man die Grundlinie mit CD'' in l und dann Fπ durch lδ in c schneidet.

Alle horizontalen Kanten sind auch im Spiegel parallel der Grundlinie; mittelst der Gesichtslinien Ai und iπ und der diagonalen Richtung dδ ist sonach das Quadrat der Grundfläche des Würfels leicht zu ergänzen. Die Höhenkanten nehmen ihre Richtung nach p. Deren Längen zu bestimmen, ziehe man pR parallel JK und mache pR gleich pD'. Die Richtung Rc schneidet dann die Höhe de ab, weil sie gleich cd ist, und es kann nun auch die Oberfläche des Würfels durch Horizontale und die diagonale Richtung eδ gezeichnet werden.

Die Plattenbelegung des Fußbodens hat keine Schwierigkeiten, da sie nur die bekannte Construction auf horizontaler Ebene bedingt, wenn man statt des Augenpunctes den Hauptpunct π und an die Stelle der Distanzpuncte die Verschwindungspuncte δ und δ anwendet.

Der Stab sr steht mit dem Fuß in s und so geneigt, daß der Fußpunct des obern Endes in o fällt. Trägt man die Senkrechte or mittelst der Augenlinien og und rs' auf die Grundlinie des Spiegels über, dann auf die Spiegelfläche dergestalt, daß man die normale Richtung pgr' zieht, die Höhe gs' in gg' setzt und durch die Richtung rg'r' die Länge der Normalen in r' bestimmt: so läßt sich einfach auch die Höhe der Senkrechten auf q bestimmen.*)

---

*) Man sieht aus den Quadraten des Fußbodens, daß o mit dem Punct q, v mit s correspondirt.

Man ziehe qs' in der Richtung pq normal und schneide die Normale durch die Linie r'π. Es ist dann w der Endpunct, v der Fußpunct des Stabes und vw der Stab im Bilde selbst.

186. — **Aufgabe.** Die Seitenlinien des Spiegels bei der in § 185 genannten Stellung zu zeichnen (Fig. 128).

Man setze in D' einen Winkel PD'(x) gleich dem Complement von $16\frac{1}{2}^0$, d. i. $73\frac{1}{2}^0$, wodurch der Durchschnittspunct (x) auf der Verticale der Verschwindungspunct für LK und JM wird. Dieser Durchschnittspunct ist jedoch auf der Zeichnenebene selten zu erhalten, und man muß dann folgendes Hülfsmittel anwenden.

Man ziehe Jm normal der Grundlinie, lege einen Winkel mJq, gleich dem Neigungswinkel $16\frac{1}{2}^0$ der Tafel und ziehe qm beliebig, normal auf Jm. Dadurch erhält man ein rechtwinkliches Dreieck qmJ, welches das umgelegte Profil von der Lage des Spiegels gegen die Tafel und wovon qJ die geometrische Neigungslinie des Spiegels ist; legt man dieses Dreieck in Perspective, so ergibt sich die Seite des Spiegels.

Man ziehe deshalb die Augenlinie mP und verlängere sie über m, schneide sie durch die Theillinie D''q in n und verbinde nJ, welches die Lage der Seite ist. Zu Bestimmung der andern Seite trage man das Dreieck über, indem man Kx normal JK, ny und mx parallel dem Horizont zieht und aus dem Durchschnitt x die Parallele ny durch eine Augenlinie schneidet; Ky ist die Richtung des Spiegelrandes.

187. — Die Operation der beschriebenen Auflösung ändert sich wesentlich nicht, wenn der Spiegel rückwärts geneigt ist (Fig. 129).

Man setzt dann den doppelten Neigungswinkel **PD'**π der vorigen Aufgabe unter den Horizont in **D'**, wodurch die Grenzlinie $\delta\pi$ unter den Horizont der Tafel zu liegen kommt. Dadurch kommt der Hülfspunct **p** oberhalb und die Höhenkanten werden aus dem Punct **R** geschnitten. Das übrige Verfahren ist, mit Benutzung der veränderten perspectivischen Puncte, das gleiche des § 186. Beim Aufsuchen der Seitenlinie **JM** ist das Profildreieck mit der Hypotenuse hereinwärts zu legen; der Richtpunct fällt dann innerhalb des Dreiecks in **n**.

188. — **Aufgabe.** Der Spiegel steht senkrecht auf der Grundebene und auch senkrecht der Tafel (Fig. 131).

Betrachten wir die Wand **MLJK** als eine solche Spiegelebene, so verschwindet deren Grundlinie in dem Augenpunct **P**, alle Linien die auf dem Spiegel senkrecht stehen, sind geometrisch parallel und horizontal und alle Horizontalen des Spiegelbildes nehmen ihre Richtung nach **P**.

Soll nun die Pyramide **ADH** im Spiegel gezeichnet werden, so ziehe man die Horizontalen **Ax**, **Cy**... und verlängere sie hinter den Spiegel, mache **ax** gleich **Ax**, **bx** = **Bx** und suche eben so den Fußpunct der Höhe der senkrechten quadratischen Pyramide. Die Spitze **h** liegt mit **H** ebenfalls in einer Horizontalen, und es bedarf nur noch der Ergänzung des Quadrats **abcd**, um die Pyramide im Bilde zeichnen zu können. Man beachte nur stets, daß die Seite des Gegenstandes, welche dem Spiegel zugekehrt, die im Bilde sichtbare ist; so ist hier die verdeckte Seite **ACH** im Spiegel in **ach** sichtbar, dagegen die **BDH** im Bilde verdeckt.

An dem Spiegel lehnt der Stab **mn**; die Senkrechte aus **n** muß nothwendig in die Spiegelebene fallen und den Fußpunct auf deren Grundlinie haben.

Zieht man daher aus dem Fußpunct des Stabes **m** eine Horizontale nach der Grundlinie **JK**, macht **m'o** gleich **mo** und zieht **m'o**, so ist diese Linie das Bild des Stabes im Spiegel. Diese Construction ändert sich in Nichts, wenn auch das untere Ende des Stabes nicht auf einer Horizontalen mit dem Fußpunct der Höhe steht.

Wie man sieht, ist das Bild der Deckentheilung eben so leicht zu construiren.

189. — **Aufgabe.** Der Spiegel behalte seine senkrechte Stellung gegen die Tafel (Fig. 135), dessen Grundlinie habe also den Augenpunct zum Verschwindungspunct; er neige sich aber um 12° gegen die Grundebene, wodurch der Horizont der Tafel sich um den doppelten Winkel in **P** dreht und für das Spiegelbild in die Grenzlinie **δR** übergeht.

Zieht man in **J** eine Normale, trägt an diese den Neigungswinkel von 12° und zieht **JM** als Schenkel, so ist dieser die Seitenlinie des Spiegels. Der Winkel **vJz** von 24°, den man in **J** an eine Horizontale setzt, gibt die Richtung der Grenzlinie, d. i. das Bild des Horizonts im Spiegelbild, wenn man **Rδ** parallel **Jz** durch **P** zieht; und trägt man die Distanz **PD'** in **Pδ**, so hat man auch auf der Grenzlinie den Verschwindungspunct der Linien, die 45° von der Hauptgrundlinie abweichen.

Will man nun den Punct **A** im Bilde finden, so ziehe man parallel mit dem Horizont **Aa'** und durch **a'** parallel mit der Grenzlinie **Pδ** die Linie **a'a**, mache **Aa'** geometrisch gleich **a'a**, so ist das Bild von **A** in **a** gefunden. Auf derselben Linie liegt der Punct **b**, wenn man **a'b** = **a'B** macht. Auf gleiche Weise findet man die Puncte **c** und **d**, wenn man nicht vorzieht, die Verschwindungspuncte δ und δ' zu benutzen, oder: da **a'b** rechtwinklich auf

der Grundlinie ist, so müssen die Linien ac und bd in den Augenpunct gehen, weil sie parallel PJ sind.

Alle senkrechten Höhenlinien, z. B. be, sind geometrisch senkrecht auf der Grenzlinie, daher parallel unter sich und gleich BE.

Der Stab mn steht mit seinem Fußpunct auf der Mittellinie des Quadrats und legt sich in der Mitte der obern Kante an diese an. Man ziehe daher mm'' und m''m', wie oben gelehrt, mache m'm'' = mm'', so erhält man den Fußpunct m' im Bilde; eben so kann man den Fußpunct h' der Senkrechten nh finden, und hat dann noch h'n' = hn zu machen, um den Stab einzeichnen zu können. Man sieht, daß man aus dem gewählten Standpunct einen Theil des Würfels im Spiegel nicht sehen kann, weil er außerhalb des Randes fällt.

190. — **Aufgabe.** Der Spiegel stehe senkrecht der Grundebene, dessen Grundlinie gehe aber mit der Hauptgrundlinie einen Winkel von 35° ein (Fig. 130).

In diesem Fall behält der Spiegel zwar den Horizont der Tafel bei, die Verschwindungspuncte jedoch ändern sich. Man suche zuerst den Verschwindungspunct für die Abweichung des Spiegels, welcher durch Verlängerung der Grundlinie HK nach dem Horizont oder durch das Antragen des Winkels von 55° als Complement, an die Verticale in D' in dem Punct X gefunden wird. Eine Normale D'R in D' an D'X schneidet in R den zugehörigen andern Theilpunct und der Winkel XD'Z bestimmt den Hauptpunct Z der Spiegelebene. In dem Punct R vereinigen sich alle Linien, welche auf der Grundebene liegend oder parallel mit dieser rechtwinklich auf dem Spiegel stehen.

Soll nun der Würfel ABrn, welcher mit der Tafel parallel, in dem Spiegel gezeichnet werden,

so ziehe man aus den Ecken A,B,D.... Senkrechte auf den Spiegel, also Richtungen nach R, und trage den Abstand dieser Puncte von der Grundlinie HK jenseits derselben auf die Verlängerungen. Dieses zu bewirken, ziehe man z. B. AJ horizontal bis an die Grundlinie, dann JZ, welche AR in a schneidet. Weil nun AJ gleich Ja, JK rechtwinklich Aa, so muß auch diese Seite des gleichschenkligen Dreiecks durch JK halbirt sein. Ebenso bestimme man die Puncte b,c,d.

Die Höhenkanten sind senkrecht auf dem Horizont und werden abgeschnitten durch die Linien rR, mR, nR.... Einfach kann aber auch der Würfel im Spiegel mittelst des Hauptpunctes Z und der Verschwindungspuncte t und t′ perspectivisch construirt werden, sobald man die Ecken a, d und p, wie beschrieben, gefunden hat.

Um den senkrechten Stab eF im Spiegelbilde zu zeichnen, verfährt man auf gleiche Weise. Man zieht el horizontal nach der Grundlinie, dann lZ und schneidet diese Linie durch eR in e′, dem Fußpuncte; zieht man eine Senkrechte e′f′ und FR, so ist in dem Durchschnitte F′ auch das obere Ende bestimmt.

190a. — Es ist oft wünschenswerth, die Verschwindungspuncte zu kennen, welche zu Linien im Bilde gehören, deren Originale, wie AD und BC nach dem Augenpuncte gehen und im Spiegel durch ad und bc vertreten werden. Sie zu finden, hat man verschiedene Mittel:

1) Durch Verlängerung von bereits nach obiger Vorschrift gefundenen Linien, wie ad, bc, nach dem Horizont. Der Durchschnitt gibt den Verschwindungspunct, ist aber sehr unzuverlässig wegen der kurzen Anlegelinie und der langen Verlängerung. Genauer bestimmt er sich nach § 80 u. w.

2) Der Winkel, den **JK** mit **AD** und **BC** bildet, ist gleich dem Winkel **PD'X** = 55°. Man setze daher an **D'x** in **D'** den Supplementswinkel = 125° und schneide damit den Horizont. Dasselbe ist's, wenn man
3) den Winkel **PD'X** = 55° an **D'X** in **D'** trägt und den Schenkel **D'y** nach dem Horizont verlängert, oder
4) wenn man an **D'z** in **D'** einen Rechten ansetzt und damit den Horizont schneidet.

Selten aber wird die Zeichnenebene so groß sein, daß der Schnitt noch hineinfällt und man muß sich dann der in § 73 u. w. angegebenen Hülfsmittel bedienen. Fast noch unentbehrlicher ist der Verschwindungspunct für die Diagonale, wie db oder ac. Man findet beide correspondirende Puncte durch das Ansetzen von zwei halben Rechten (45°) am **ZD'** in **D'**, und erhält dadurch die Puncte **t,t'**.

Bei Theilung in Quadrate des Fußbodens z. B. werden diese Puncte zu großer Erleichterung dienen.

191. — **Aufgabe.** Wenn der Spiegel eine doppelt schiefe Ebene bildet (Fig. 134).

Man stelle die perspectivischen Hauptpuncte für die schiefe Ebene nach § 163 fest, **F** sei der Augenpunct und **D'** die Distanz der Tafel; zm ist die Grundlinie des Spiegels, welche 40° von der Verticale abweicht; dabei ist der Spiegel 20° von der Senkrechten ab vorwärts gedreht, was eine Erhebung der horizontalen Ebene im Spiegel von 2 . 20 = 40° mit sich bringt.

Zuerst bestimme man den Neigungswinkel der schiefen gegen die horizontale Ebene, indem man eine senkrechte Ebene normal auf die Grundlinie des Spiegels zeichnet. Man verlängere nemlich die Grundlinie **Zm** nach dem Horizont in **T**, verbinde

T mit dem Hülfspuncte D' und bilde den rechten Winkel TD'p, wodurch der Horizont in p geschnitten wird. Durch p lege man die Normale FG, so vertritt diese die Grenzlinie von der senkrechten Ebene auf die horizontale, p den Augenpunct und pD' die Distanz für diese Beziehung.

Die Distanz pD' trage man auf den Horizont in pE und zeichne in E den Winkel pEF = 40°, wodurch sich in F der Verschwindungspunct für alle Winkel von 40° ergibt; sonach bildet auch FZp einen Winkel dieses Maßes und FZ ist rechtwinklich auf Zm. Da ZF und ZT in dem Horizont verschwinden, beide aber in der schiefen, um 40° geneigten Ebene liegen, so muß F und T in der Grenzlinie der schiefen Ebene liegen und die Normale Pπ den Hauptpunct π in dieser Grenzlinie bestimmen. Man setze ferner auf Pπ in P eine Normale PJ gleich der Distanz PD', und ziehe πJ, welches die Distanz der schiefen Ebene ist, die man in πK zu setzen hat.

Nach dieser Vorbereitung kann nun ein beliebiger Punct (A) im Spiegelbild gefunden werden.

Man ziehe aus A eine Parallele mit dem Horizont. Diese trifft die Grundlinie des Spiegels in Z und bildet mit derselben den Winkel mzA, welcher gleich dem Complement von 40°, d. i. 50°, ist. Diesen Winkel trage man an TK in TKO, womit sich der Durchschnittspunct O auf der Grenzlinie ergibt, ziehe ZO, so ist auch OZT gleich 50° = TZA auf der Grundebene, und das Bild von A muß auf ZO liegen. Jede Richtung Ap, Cp... ist normal der Grundlinie mz; von i, wo Ap die Grundlinie schneidet, ziehe man nach F, wodurch in ebenfalls normal der Grundlinie wird. Auf ihr muß ebenfalls das Bild von A liegen, daher nothwendig in dem Durchschnittspunct von ZO nnd Fi

in a, indem damit die Bedingungen erfüllt sind, die Ai gleich ia machen. Dasselbe Verfahren wiederholt man, um noch andere Puncte im Bilde zu bestimmen, die zur Zeichnung der Grundfläche des Würfels erforderlich sind.

Man hat nun die Höhenkanten zu construiren. Man ziehe JH normal πJ bis zur Verlängerung von πP, wodurch H Verschwindungspunct für alle Senkrechten auf der Spiegelebene wird. Lege HL der Grenzlinie parallel und gleich JH, welches in L den Theilpunct für diese Höhen gibt. Nachdem die Richtungen Hay, Hdt, Hc... gezogen, ziehe man aus dem Durchschnittspuncte Z noch HZ nach g und parallel der Grenzlinie auch Ze, trage das Höhenmaß Ax in Ze und schneide durch die Richtung Le die HZ in g. Dadurch hat man Zg gleich Ze gemacht und kann durch die perspectivische Parallele mit Za, d. i. mit der Richtung von Z nach O, die Höhe ay abschneiden, die dadurch gleich Zg, = Ax wird. Bei Bestimmung der Höhe von dt verfährt man auf gleiche Weise, indem man aus dem Durchschnittspunct r die Parallele rn zieht ꝛc.

Fällt der Verschwindungspunct der horizontalen Kanten noch in die Zeichnenebene, so läßt sich dieser, besonders bei complicirtern Gegenständen, mit Vortheil benutzen. Man findet diesen Punct, wenn man in K einen rechten Winkel OKM setzt und damit die Grenzlinie in M schneidet. Doch ist eine große Genauigkeit erforderlich, um den Durchschnitt verlässig zu erhalten; abgesehen, daß der Raum des Papiers selten zureicht. Es bleiben noch die Seitenlinien des Spiegels zu construiren, da man diese höchst selten mit Hülfe ihres Verschwindungspunctes wird zeichnen können. Das Verfahren hierbei gleicht dem § 186 beschriebenen. Man lege nemlich an die Senkrechte Zo den Winkel vZw, gleich dem Nei-

gungswinkel von 20°, trage die Kathete vw des Dreiecks auf die andere in vu, ziehe Gu und pv verlängert bis zu dem Durchschnitt F, und durch diesen die Seitenlinie ZF ꝛc.

192. — In allen den beschriebenen Fällen kann es sich meistens ereignen, daß die Unterkante des Spiegels über dem Fußboden erhöht ist. Dies ändert in der Operation selbst nichts; nur muß man die Spiegelebene verlängern und deren Durchschnittslinie mit dem Fußboden suchen. Hat man dann das Bild, wie beschrieben, gezeichnet, so wird sich von selbst zeigen, was in die Begrenzungslinien des Spiegels fällt.

193. — Hierbei ist es oft erwünscht, den Raum zu kennen, welcher aus der Stellung des Zuschauers in dem Spiegel überblickt wird (Fig. 132).

Wir wollen zur Lösung dieser Aufgabe das einfache Beispiel eines Zimmers CDEF wählen, dessen Hinterwand in C'D'KL gezeichnet ist, um zu bestimmen, welcher Raum sich in dem Spiegel MOPN wirklich sichtbar macht.

Man ziehe durch die Ecken des Spiegels parallel der Grundlinie BC die Linien Mm, Nn, Oo, Pp, nehme M'm gleich MM', N'n gleich NN', O'o gleich OO' ꝛc.; verlängere die Durchschnittslinien D'K nach K'' und C'L nach L'', mache Kk' gleich KK', Kk'' gleich KK'' ꝛc.; verbinde l'ml'k''...p, so ist OK'K'' das Bild von ok'k'', K''K'N.... das von k''k'n....l'' und L'L''M das Bild von l'l''m. Es spiegelt sich daher Alles ab, was in den Grenzen nk'ok''l''ml'pn liegt.

194. — **Aufgabe.** Es wird zuweilen das Spiegelbild des Gesichtspunctes verlangt (Fig. 133); im vorliegenden Fall stehe der Spiegel senkrecht der Grundebene, die Stellung gegen die Tafel sei belie-

big, der Horizont sei ag, O der Hülfspunct und A der Augenpunct.

Der Spiegel **MNQP** schneide den Horizont in a, so ist a der Hauptpunct für die Ebene des Spiegels. In O setze man den rechten Winkel aOg, wodurch g das Bild des Gesichtspunctes auf dem Spiegel wird, dessen Ebene man sich nöthigenfalls verlängert denken muß. Um den Fußpunct des Gesichtspunctes auf dem Spiegel zu finden, verlängere man die Spiegelebene bis zu der Grundlinie P'M', ziehe aus g die Senkrechte gL, schneide sie mit der verlängerten Grundlinie in L und halbire gL in g'. Der Punct g' ist der gesuchte Punct in der perspectivischen Zeichnung.

195. — Der Fall, wo die Widerscheine gezeichnet werden sollen (Fig. 136), wenn zwei Spiegel je nach ihrer beziehlichen Stellung das Bild vier, sechs, acht.....2nmal wiederholen, kommt zu selten vor, als daß er hier ausführlich abgehandelt werden dürfte. Wir wollen jedoch die einfachere Stellung hier benutzen, um einen Begriff von dem Verfahren im Allgemeinen zu geben.

Die Spiegel **LMNO** und **QMNR** bilden einen rechten Winkel in ihrer Neigung gegen einander und stehen senkrecht der Grundebene. Was die Spiegel selbst betrifft, so wird jeder sein Bild in dem andern spiegeln; diese Bilder sind gerade Fortsetzungen ihrer selbst und perspectivisch so groß, als der Spiegel an sich. So ist **MNpq** das Bild des Spiegels **MRQN** und **MNol** das Bild von **LOMN**, welches leicht nachzuweisen ist.

Eine Figur **AA'** zwischen den beiden Spiegeln wird in dem Spiegel **LN** in **BB'** sich spiegeln, denn **AB** ist normal **LM** und **At** = **tB**. In dem Spiegel **MR** spiegelt sich dieselbe Figur unmittelbar in **aa'** unter gleichen Beziehungen; dieses Bild wird

aber wieder reflectirt in dem Bilde des Spiegels LN, nemlich in lN aus denselben Gründen. In dem Widerscheine Mp kann ein Bild des Stabes nicht mehr gesehen werden; denn zieht man aus B senkrecht auf QD', verlängert die Normale in den Spiegel, macht bz gleich zB, so kommt das Bild des Stabes hinter die Fläche MNpq zu stehen und wird durch den Spiegel MNol verdeckt. Der Stab gibt sonach in der gegebenen Stellung der Spiegel unter keinem Falle mehr als 3 Widerscheine, in B, a und b.

Stehen zwei senkrechte Spiegel einander parallel entgegen, so wiederholen sich die Bilder in's Unendliche. Werden die Spiegel in einem spitzen Winkel zusammengestellt, so vermehren sich die Bilder sovielmal, als das Maß des Winkels in 4R enthalten ist. Stehen die senkrechten Spiegel z. B. $22\frac{1}{2}^{0}$ gegen einander geneigt, so werden sich $\frac{360}{22\frac{1}{2}} = 16$ Bilder zeigen ꝛc.

Siebenter Abschnitt.

Zusammengesetztere Aufgaben.

Erstes Kapitel.

Gemischte Gegenstände.

196. — **Aufgabe.** Es sei ein Krönungsgesims NFEA perspectivisch zu zeichnen (Fig. 137)

Der Augenpunct sei A, die Fläche DFAE laufe mit der Tafel parallel, der Distanzpunct kann nur

auf der einen Seite des Augenpuncts benutzt werden und sei y'. Man zeichne das geometrische Profil Dabc. . .hD, welches mit dem Schaft EAF in gleicher Ebene liegt, nach der Verjüngung, welche dieser Ebene entspricht. Durch die Puncte cdfg ziehe man die Senkrechten ck, dm, fn, go, ziehe die Richtung AD und mache auf ihr DH gleich aD, verbinde das perspectivische Parallelogramm HNaD und ziehe die Diagonale DN. Zieht man aus den Durchschnitten k, m, n, o Gesichtslinien Ak, Am..., so hat man diese Puncte auf DN übertragen und es lassen sich durch Senkrechte aus N, p, q... die Glieder in perspectivischer Projection bestimmen, indem man die Senkrechten durch die Gesichtslinien bO, cQ, dt, eu, fv und gx in O,Q,t,u,v,x schneidet, die durch die Eckpuncte des geometrischen Profils und A gehen. Parallelen mit aF vollenden das Gesims, und NOQtuvx ist dessen Profil.

197. — **Aufgabe.** Das Eckprofil perspectivisch zu zeichnen, dessen geometrisches Profil in abcdefa auf der Eckkante a'a gegeben ist (Fig. 138).

Man bringe das gezeichnete Profil in eine perspectivische Lage, daß dessen Ebene in die mnaa' zu liegen kommt. Dieses zu bewirken, zieht man aus den Durchschnittspuncten des Profils mit a'a Linien nach dem Verschwindungspunct der genannten Ebene y, wie a1, und schneidet diese Linien aus den Eckpuncten bcd.... des Profils durch den Theilpunct t. Durch das gefundene Profil 1,2,3... lassen sich nun die Kanten der Glieder der Seite a'ac' nach x ziehen.

Schneiden wir diese Parallelen aus den Durchschnittspuncten des Profils auf aa' durch die Richtungen aus dem Verschwindungspunct d' der Diagonale, wie d'ap, d'rq...., so erhalten wir das

Profil p,q... g der Gehrung und können durch dessen Eckpuncte die parallele Gliederung der Seite mnaa' ziehen.

Es sind noch die Gehrungen auf den Schaftlinien mn und c'o zu finden. Man trägt zu diesem Zweck das geometrische Profil von aa' auf c'o und mn über, indem man die Richtungen ax, rx.... ziebt, mit ihnen c'o und mn schneidet und aus den Durchschnittspuncten Horizontale zieht. Dieses Profil c'f' legt man in die Ebene aa'oc' um, woraus das Profil c'e' hervorgeht. Ebenso verfährt man auf der andern Seite mit dem Profil mm', welches zwar keiner Erläuterung bedarf, jedoch durch Bestimmung des Punctes e' erinnerlich gemacht werden soll. Man verlängert die Richtung ac' und schneidet aus t' durch die Richtung t'f' die Verlängerung in e', dem verlangten Eckpunct des zurückgelegten Profils. Zieht man nun durch e' die Richtung yp', so ist p' als Durchschnitt der obern Parallele der obere Eckpunct der Gehrung, welcher mit p correspondirt. Auf diese Weise werden die andern Puncte dieser Gehrung und ebenso die auf der andern Seite gefunden.

198. — **Aufgabe.** Es soll das Profil des Gesimses, wo es in mno mit der Wand abschneidet, gefunden werden (Fig. 139).

Es ist abcd... das geometrische Profil des Gesimses und ist, nach Anleitung der vorigen Aufgabe, aus ihm das Eckprofil b'd' bereits gefunden worden. Die Linie no ist die Kante des Vorsprungs, in welcher derselbe sich der Wand anschließt. Die Verschwindungspuncte x und y für die Gesimslinien, nebst dem Theilpunct t, sind bestimmt. Man trage die Durchschnittspuncte des geometrischen Profils von af auf no über und schneide durch xn, xp....

die aus dem Eckprofil nach y gezogenen Parallelen in m, q..., wodurch das Profil sich ergibt.

199. — **Aufgabe**. Das Consol (Fig. 140) perspectivisch zu zeichnen.

Das geometrische Profil ist in der Mitte des Consols in a4a'2'3'x'' gezeichnet, und die Vorderansicht in G projicirt.*)

Man trägt von a auf aa' aus der Vorderansicht die Puncte ofd in a',f',d' und ebenso auf die andere Seite von a in F,d,. Durch a legt man die Richtung x^0a nach o und schneidet diese durch td', so ist o der Punct, wo die Platte des Consols an die Wand stößt. Trägt man auf gleiche Weise die aus G entnommenen Puncte auf die Richtung ox^0 über, zieht aus den übertragenen Puncten Senkrechte, setzt aus o die Dicke der Platte ab und zieht diese parallel oo' (nach x^0), so hat man die Fläche der Platte gefunden, mit welcher sie an der senkrechten Wand anliegt; und die Senkrechten aus den innern, aus e und f Fig. G übertragenen Puncten geben die Fläche des Consols an der Wand.

Es ist nun das mittlere Profil zu suchen. Man ziehe y^0a nach q und schneide sie durch t'a', wo q der obere Punct des mit y^0m parallelen Profils ist; man zieht y^02 und schneidet durch die Senkrechte qr, dann x^0q nach m, wodurch sich der Eckpunct m in der Richtung y^0o bestimmt. Ebenso wird auf der Senkrechten aus m durch rx^0 die Richtung der untern Kante bestimmt, deren Länge durch y^0a' aus dem geometrischen Profil festgesetzt wird, so daß man die Platte jetzt vollständig zeichnen kann. Das perspectivische Profil zu vollenden, ziehe man ry^0 und

*) Die Verschwindungspuncte x^0y^0, die zugehörigen Theilpuncte t,t' und der Augenpunct A sind auf der untern Rahmenlinie angegeben.

schneide sie aus dem Punct n' des geometrischen Profils mit t'n' in n. Den Punct s findet man durch y^o3 und t'3', und kann in dem Karnies nach Belieben noch mehr Puncte finden, wie h, c, wenn man sie in dem geometrischen Profil zuvor feststellt. Mittelst des so entworfenen Profils lassen sich nun auch die beiden Seitenebenen zeichnen, indem man die Richtungen y^ox, y^ox' ꝛc. durch x^on, x^os.... schneidet.

200. — **Aufgabe.** Ein Ring ist perspectivisch zu zeichnen (Fig. 141).

Man hat dabei vier Kreise zu berücksichtigen, wovon zwei die untere, zwei die obere Fläche begrenzen. Der vierte Theil des geometrischen Grundrisses ist in Fig. 141 gezeichnet und enthält die Hülfslinien, die zu der Construction der Kreise nöthig werden. Die Zeichnung derselben muß als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden. Man beginnt am besten mit den beiden obern Kreisen, deren Mittelpunct n ist; in Beziehung auf die Hülfsfigur ist n'f' und n'e' gleich mn; a'b' ist der auf e'f' normale Durchmesser und die übrigen Linien sind die diagonalen Richtungen des umschriebenen Quadrats für den äußern Kreis.

Der gegebene Abstand des innern Kreises cd Fig. 141a wird auf e'f' nach innen getragen und der innere Kreis gezeichnet. Dann projicirt man die untern beiden Kreise und verbindet die äußersten Puncte durch die Senkrechten bei h' und e'.

201. — **Aufgabe.** Einen Wulst mit Plinte perspectivisch zu zeichnen (Fig. 142).

Der orthographische Aufriß ist in Figur 142a dargestellt, und der vierte Theil des Grundrisses in Fig. 142b. Man trage dies geometrische Profil auf die Mittellinie der bereits construirten Plinte, wie es die gleichen Buchstaben beider Figuren be-

zeichnen. Es sind nur die beiden Kreise bei A und D, welche hauptsächlich zur Bildung der Figur dienen, und deren Puncte m und n die äußersten Puncte zu den perspectivischen Profilen geben. Man lege durch diese Puncte einen Kreis in Perspective und zwei andere als obere und untere Grundflächen, so läßt sich dadurch schon die perspectivische Form des Wulstes bestimmen. Eine größere Genauigkeit ist nur in sehr seltenen Fällen nöthig und kann dann leicht erzielt werden, wenn man aus den Puncten, die zur Construction des obern oder untern Kreises dienten, Senkrechte zieht, diesen ihre zukömmliche Höhe gibt und sie als normale Durchmesser betrachtet, auf denen man perspectivische Halbkreise zeichnet und die Profillinie über deren höchste Puncte führt.

202. — **Aufgabe.** Man soll das antik-dorische Kapitäl, dessen architectonisches Profil in xilkmn'no entworfen ist, perspectivisch zeichnen (Fig. 143).

Man zeichne den Abacus aus den Ecken ik... des Profils, da derselbe der Tafel parallel ist, mittelst des Augen- und Distanzpunctes. Auf dem Echinus sind es die Puncte k' m und n, welche zu Bestimmung der Form dienen; durch sie hat man perspectivische Kreise zu legen, deren Radien und Hülfslinien in Fig. 143a gezeichnet sind. Da der Horizont unterhalb des Kapitäls liegt, so erhält man die untere Ansicht dieser Kreise. Verbindet man dann die äußersten Puncte derselben, so ist das perspectivische Bild des Wulstes beendet. Man hat dann noch die Kreise für die Einschnitte des Halses, von denen nur die beiden äußersten Linien hier angegeben sind, und die für das obere und untere Ende des Säulenschaftes zu entwerfen, deren Durchmesser ebenfalls in dem Profil gezeichnet sind. Man wird noch zwei Erzeugungslinien cd und ef bemer-

ken, welche auf der vordern Fläche construirt worden, um zu zeigen, welche Biegung der Echinus in den diametralen Durchschnitten c und e in perspectivischer Ansicht macht.

So leicht als die Procedur bei dergleichen Projectionen ist, so sehr hat man sich dabei vor überflüssige Linien und Verwirrung zu hüten.

203. — **Aufgabe.** Es ist ein Stück eines senkrecht geschnittenen alt-dorischen Säulenschaftes mit seinen Canneluren zu zeichnen (Fig. 144).

Man zeichne den geometrischen Grundriß auf den gegebenen Durchmesser AB, theile den Halbkreis in 10 gleiche Theile und ziehe die Ordinaten aus den Theilpuncten. Durch die Fußpuncte dieser Ordinaten lege man Gesichtslinien nach dem Augenpunct, und kann nun mittelst dieser Linien und der Ordinaten die Puncte des Kreises sehr genau nach der Methode bestimmen, die man bei Figuren befolgt, welche man mit Hülfe des geometrischen Grundrisses projiciren will. Wenn die Canneluren genauer gezeichnet werden sollen, als man aus freier Hand vermag, so reicht es hier und in den meisten Fällen hin, noch einen innern Kreis zu construiren, der die Tiefe der Canneluren tangirt. Nur bei denen der jonischen Ordnung, die in Halbkreisform ausgehöhlt sind, kann man veranlaßt werden, diese Höhlungen einzeln zu construiren. Aber auch dann findet der denkende Zeichner Mittel genug, sich die Arbeit zu erleichtern.

204. — **Aufgabe.** Man soll das Pfeilerkapitäl perspectivisch zeichnen (Fig. 145).

Da der Pfeiler parallel der Tafel steht, so vereinfacht sich die Construction sehr. Hat man das geometrische Profil abcd... gezeichnet, so ziehe man durch bcd... Gesichtslinien und schneide diese durch

Theillinien aus dem Distanzpunct nach ad'e'.... Dadurch wird zuerst der Grat hg gefunden. Um den Grat mh zu bestimmen, trage man die Puncte ad'e' auf die Verlängerung der Kante h des Schafts, überziehe kl und verfahre auf gleiche Weise. Auf der Kantenverlängerung pi gelten dieselben geometrischen Maße von ag; wie auch pq gleich ab ist. Das Verfahren, die Ecke o und die übrigen Puncte des Eckprofils oi zu finden, ist dasselbe, wie bei den andern Ecken, und die Verbindung der Eckpuncte durch Parallelen gibt die gesammte Gliederung.

205. — In der Figur 146 geben wir ein vollständiges Hauptgesims mit Bestimmung des Horizonts, des Augenpunctes P und der halben Distanz Pd; das geometrische Profil in CAP gezeichnet. Wir glauben nicht etwas darüber zur Erklärung sagen zu müssen und überlassen dem Leser die vorhergegangenen Lehren dabei anzuwenden und es als eine gute Uebung zu zeichnen.

206. — **Aufgabe.** Es soll ein Theil eines Gesimses mit Eierstab und Zahnschnitten gezeichnet werden (Fig. 147).

Wir nehmen an, daß die Glieder des vorliegenden Gesimses bereits nach der gegebenen Vorschrift in Perspective gelegt worden sind, soweit solches ohne die Eierverzierung und Zahnschnitte geschehen kann, und beginnen unmittelbar mit Einzeichnung dieser.

Es ist dann A die perspectivische Ecke der Platte, auf welcher die Verzierungen stehen, und AB die Ecklinie des Architravs, aus welcher alle Ecken der über einander liegenden Gesimsflächen durch Diagonalen aus den Distanzpuncten geschnitten werden. Man trage die Breite der Zahnschnitte nebst ihren Zwischenweiten auf die Linie ab in 1,2,3.... und ziehe durch die Theilpuncte Gesichtslinien nach AB,

wo Senkrechte auf den Durchschnitten die vordere Theilung der Zahnschnitte geben. Zieht man die Diagonale AM und verlängert die Gesichtslinien bis zum Durchschnitt dieser Linie, so lassen sich durch Horizontale die Theile auch auf AF übertragen, wo man Senkrechte aus den Durchschnitteu zieht und dadurch die Vorderseite der Zähne auf der Seite des Gebälks erhält. Sie lassen sich auf dieser Seite auch dadurch finden, daß man ON zieht, die Theilung der Zähne, wie sie auf OO′ fällt, auf die Verlängerung trägt und durch Gesichtslinien auf AG abschneidet. Ist der Raum auf ON nicht hinreichend, um die ganze Anzahl der Zähne darauf abzutheilen, so ziehe man aus irgend einem Zahntheilpunct, z. B. F, eine zweite Horizontale, auf welche man durch Gesichtslinien die Breite eines Zahns und der Zwischentiefe überträgt und dieses Maß weiter nach U setzt, soweit diese Linie benutzt werden kann. Dieses Mittels kann man sich dann wiederholt bedienen, wenn die Fronte lang sein sollte. Die Zwischentiefe SA ist zu Aufnahme des Pinienapfels bestimmt, der gewöhnlich in den Ecken der Zahnschnittverzierung steht. Bei P sieht man das Verfahren die Stege in die Zwischenweiten einzuzeichnen.

Die Größe und Stellung der Eier erhält man, wenn man, nachdem der Eckpunct C bestimmt worden, die Linien AB und BC und aus B die Linien BQ und BR zieht. Auf letztere Linien trägt man die Breite der Zähne und der zugehörigen Zwischenweiten, welche von der durch Parallelen auf CT und CD übertragen werden, wo die größern Theile die Breite der Eier, die kleinern die Breite der Höhlen bestimmen.

Zweites Kapitel.

Von dem Zeichnen der Gewölbe und der Kugel.

207. — **Aufgabe.** Ein Kreuzgewölbe zu zeichnen (Fig. 147).

A. Wenn dasselbe unter dem Horizont liegt.

In der Regel ist die Fläche, die mit einem Kreuzgewölbe überspannt ist, ein Quadrat und das Gewölbe besteht aus zwei gleichen halbcylindrischen Flächen, die sich rechtwinklich schneiden. Man kann daher das Gewölbe in ein Parallelepipedum einschließen, wie BCDEbcde, welches die Durchmesser der Gewölbbogen zu Seiten der Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat.

Das in der vorliegenden Figur dargestellte Gewölbe steht winkelrecht der Tafel, wodurch die Bögen BCF und EDh geometrische Halbkreise in der perspectivischen Ansicht werden. Hat man das Parallelepipedum construirt und die beiden der Tafel parallelen Halbkreise gezogen, so mache man BK und CL, bT und cU gleich $\frac{3}{10}$ des Halbmessers BF und ziehe aus K, L, U und T Gesichtslinien nach dem Augenpunct, die auf den Diagonalen des Quadrats die Fußpuncte M, N, Q, R schneiden. Mittelst der horizontalen Hülfslinien aus T und U, der senkrechten aus SS'Q'R' und der Mittellinien Ji, Gg lassen sich die Bögen der beiden andern Seiten zeichnen, indem six und ygu Bestimmungspuncte derselben sind. Bei Zeichnungen im größern Maßstabe ist es besser, das Verfahren zu benutzen, wo in dem vordern Bogen mehrere Ordinaten angenommen werden, die man auf die Seiten BE und CD überträgt rc., wodurch zugleich die Gratbögen

bestimmt werden können. Dieses Verfahren wird in einer folgenden Aufgabe erläutert werden. Der Kreuzungspunct o der Grate wird durch die Senkrechte aus dem Mittelpunct O der Grundfläche und der Scheitellinie ig (oder fh) gefunden, die hier nicht gezeichnet ist, um die Linien nicht zu sehr zu häufen.

Die Grate zu zeichnen, ziehe man su und xy, errichte Normalen aus M, N, Q und R bis an jene Linien, so erhält man Puncte auf den Gratbögen, deren gemeinsamer Scheitel o ist, und es lassen sich nun die Bögen aus freier Hand einzeichnen. Jeder Punct der Grate correspondirt mit einem Punct der Diagonale, über den er senkrecht liegt; die Gratbögen selbst bilden elliptische Bogen, deren große Axen diese Diagonalen der Grundfläche sind. Man hat zuletzt noch die Scheitel v und w durch eine Parallele mit bc zu verbinden, um die verlangte Projection zu vollenden.

208. — **Aufgabe.** Man soll ein Kreuzgewölbe zeichnen, wo der Horizont unterhalb liegt (Fig. 148).

Es sei AB der Durchmesser des vordern vollen Bogens, die Scheitelhöhe OX und ADCE das perspectivische Quadrat des Gewölbanfangs, CRUT aber der quadratische Raum, der mit dem Kreuzgewölbe überspannt werden soll. Es ist dann FG der Durchmesser des hintern Bogens, der über der Quadratseite TU steht, und die Anfänge der hintern Bögen sind die Quadrate TQ und LU. Wegen der parallelen Lage gegen die Tafel sind die Stirnbögen AOB und GMF geometrische Halbkreise, deren Mittelpuncte in M und N liegen.

Die Construction der Seitenbögen, wenn sie sichtbar, bedarf keiner Erklärung; diese kann sich auf die Projection der Gratbögen beschränken, welche

als halbe Ellipsen auftreten. Man theilt den Halbkreis AOB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, vom Scheitel ab nach beiden Seiten und zieht aus den Theilpuncten Gesichtslinien nach dem Augenpunct, desgleichen Horizontale nach den beiden Normalen C10 und R11. Aus den Durchschnitten auf den Normalen 7—10 und 11—14 zieht man ferner Theillinien nach den Distanzpuncten und bemerkt deren Durchschnitte mit den Gesichtslinien, nemlich 16, 17, 18, S...., als Puncte, welche in den Graten liegen und durch welche die Gratbögen gelegt werden.

Es müssen immer die Gratbögen mit den äußern Stirnbögen in eine Cylinderebene fallen*), folglich müssen die Puncte der Grate auf den perspectivischen Parallelen liegen, welche durch die Gesichtslinien dargestellt werden und Erzeugungslinien des Cylinders sind. Es liegen aber zugleich diese Puncte der Grate, über den Diagonalen EL und PQ, und da sowohl die Gesichtslinien perspectivisch parallel LF oder QG, als auch die Theillinien perspectivisch parallel den Diagonalen QT und LU sind, so müssen die Durchschnittspuncte dieser Linien nothwendig in den Graten liegen.

209. — **Aufgabe.** Man soll ein Kreuzgewölbe zeichnen, dessen Bögen Spitzbögen sind, und wo der Augenpunct unterhalb angenommen ist (Fig. 149).

Auch hier ist der mit Gewölbe überspannte Raum ein Quadrat, die Projection nicht verschieden von der vorigen.

Sind die beiden Spitzbögen geometrisch gezeichnet, und sind die Scheitel durch die Gesichtslinie

---

*) Wenn die architectonische Anlage nicht von einer andern Bestimmung ausgegangen ist.

ON verbunden, so trägt man von O ab gleiche Theile auf die Schenkel OA und OB, zieht aus den Theilpuncten Parallelen mit der Grundlinie, welche CH und IR schneiden, und auch aus denselben Gesichtslinien. Schneidet man letztere aus den Theilpuncten auf CH und IR, so geben die Durchschnitte Puncte der Diagonalbögen oder Grate ESQ und LSP, und der Punct S ist der gemeinsame Scheitel. Daß die Grate hier nicht elliptische Linien sind, sondern Spitzbögen, jedoch weit flächerer Art, als die Stirnbögen, ist begreiflich.

210. — **Aufgabe.** Es soll ein Kreuzgewölbe gezeichnet werden (Fig. 150 und 150a, b.), dessen Stirnbögen volle Kreisbogen sind, und wo die Diagonale der Grundlinie parallel liegt.

Hier müssen zuerst die Puncte der gleichen Theilung, womit man in § 208 begann, von dem Bogen auf die Diagonale übertragen werden. Man zeichne zu diesem Zweck die Hülfsfigur 150a, theile den Viertelkreis OB in eine Anzahl gleicher Theile und ziehe aus den Theilpuncten Senkrechte und Horizontale auf die Radien. An AB setze man noch die Breite der Widerlager und trage die Puncte C, B, 1, 2...A aus Fig. 150a in Fig. 150b auf CA und BF, als die Schenkel eines rechten Winkels; ergänze das Quadrat CAOA′ und ziehe die Diagonale OC, auf welche man die Puncte B, 1...A durch Parallelen überträgt. Sodann trage man diese Diagonale mit ihrer Theilung in die Hauptfigur auf CD von der Mitte nach beiden Seiten, ziehe in C und D Normalen CH und DK und trage aus Fig. 150a die Linie AO mit ihrer Theilung von C aus nach H und von D aus nach K.

Nachdem der Augenpunct und Distanzpunct bestimmt und obige Vorbereitung getroffen ist, zeichne

man das Quadrat der Grundfläche und ziehe die Diagonale FG, trage die Puncte E, 4, 5, 6, O mittelst der Distanzpuncte auf die Quadratseiten CF, FD, DG und GC über, errichte in den übertragenen Puncten Senkrechte und schneide diese aus den Puncten auf CH und DK. Hierdurch erhält man Durchschnittspuncte der Stirnbögen, welche aus freier Hand ausgeführt werden; wie überhaupt in diesem Fall kein Bogen vorkommt, der geometrischer Kreisbogen ist.

Zu Aufsuchung der Gratbögen errichtet man auf den Puncten 4, 5, 6, O der Diagonalen Senkrechte und schneidet sie aus den Puncten auf FL durch Gesichtslinien nach dem Augenpunct, und durch die Puncte auf CH und DK in horizontaler Richtung. Die Durchschnitte geben Puncte der Gratbögen, die man ebenfalls aus freier Hand zeichnet. Dasselbe Resultat wird erlangt, wenn man die Senkrechten aus 4, 5, 6, O der beiden Diagonalen CD und FG mit Theillinien aus 10, 11, 12... schneidet.

Der Scheitel der Gratbögen liegt in der Horizontalen KH in S, sonach in gleicher Höhe mit den Scheiteln M M, der Stirnbögen und senkrecht über dem Durchschnittspunct der Diagonalen des Grundrisses.

211. — Die Kugel perspectivisch zu zeichnen hat man verschiedene Methoden. Auf den ersten Anblick scheint es zu genügen, einen größten Kreis als deren Projection aufzustellen, und mehrere Schriftsteller, namentlich Horstig in seiner Schrift „über malerische Perspective" stellen selbst die Behauptung auf: die Kugel sei im Bilde in jeder Lage ein Kreis. Dieser Irrthum widerlegt sich leicht aus folgender Betrachtung (Fig. 151).

Es sei der Kreis vom Mittelpunct m ein größter Kreis einer Kugel, in A der Stand des Auges. Gelangt deren Bild zum Auge, so geschieht es durch den Strahlenkegel Aab, dessen Spitze im Auge liegt und dessen äußerste Strahlen die Kugelfläche tangiren. Die Tangirungspuncte sind a, b, und da Normalen, auf aA, bA in dem Berührungspunct gezogen, durch die Mitte des Kreises (der Kugel) gehen, so sieht das Auge nur einen Kreis, dessen Durchmesser ab, also kleiner als der Kugeldurchmesser, und welcher ein Kugelschnitt, rechtwinklich mit der Axe des Strahlenkegels ist. Es ist daher schon nicht zulässig, bei perspectivischer Projection der Kugel einen größten Kreis zu unterlegen. Nur bei dem Stand des Auges in unmeßbarer Ferne (in orthographischer Projection) ist der größte Kreis das Bild der Kugel. Von dem nähern oder fernern Stand des Auges hängt die Größe des Bildes ab; sie wächst mit der Entfernung, und nimmt ab bei Verminderung des Augenabstandes; sie kann hypothetisch sogar Null werden. Aus Fig. 152 kann man sich von der Richtigkeit dieser Behauptung bildlich überzeugen; es wird nemlich Alles, was hinter dem Kreise liegt, welcher die Grundfläche des Strahlenkegels macht, von ihm verdeckt und dem Auge unsichtbar, und die Strahlen, welche von den Endpuncten des Kugeldurchmessers divergent ausgehen, treffen das Auge in keiner Beziehung.

212. — Es steht aber dieser Kreis stets senkrecht der Axe des Strahlenkegels; er kann daher im Bild nur als Kreis erscheinen, wenn das Kugelcentrum mit dem Augenpunct zusammenfällt oder in der Verticallinie des Auges nach dem Horizont liegt. Ist die Lage des Mittelpunctes in der Ebene, welche wagerecht durch den Horizont gedacht wird, aber nicht in der Senkrechten, die das Auge mit dem

Augenpunct verbindet, dann nimmt die sichtbare Kreisfläche der Kugel eine geneigte Lage gegen die Tafel an, bleibt aber senkrecht der Grundebene. In jeder andern Stellung außerhalb der gedachten Horizontalebene, ändert sich auch die senkrechte Beziehung zur Grundebene und der Kugelschnitt nimmt die Lage einer doppelt geneigten Kreisebene an, deren Pole stets in der Axe des Strahlenkegels liegen. In allen diesen Stellungen muß nothwendig das Bild der Kugel eine Ellipse werden, deren Formbedingungen der Stand der Kugel gegen den Horizont, gegen die Verticalebene und gegen das Auge oder die Distanz sind.

213. — Auf diese Betrachtungen gründet sich nachstehende Projection einer Kugel (Fig. 153).

Es sei **A** der Augenpunct, **k** der Mittelpunct der Kugel im Bild. Man ziehe die Richtung **Ak** und senkrecht darauf **GS** durch den Augenpunct; von **A** nach **G** trage man die Distanz und von **A** nach **S** den Abstand des Kugelcentrums von der Tafel. Man ziehe **Gk** und schneide diese Richtung durch eine Senkrechte aus **S** auf **GS** (in **K**). Mit dem Radius der Kugel beschreibe man aus **K** einen Kreis **LUN** und ziehe an ihn die Tangenten **GL** und **GN**; wo diese die Richtung **Ak** in **l** und **n** schneiden, sind die Endpuncte der großen Axe. Man verlängere die Sehne **LN**, welche Durchmesser des sichtbaren Kreises ist, nach **a'**, wo sie die Richtung **Ak** schneidet, ziehe **VF'** normal **Ak** durch **a'** und noch **Ga** normal **Gk** bis zum Durchschnitt mit **Ak**; trage **MN** in **a'V** und **a'W**, ziehe **vw** parallel **VW** und **aV**, **aW**, so schneiden sich die Endpuncte der kleinen Axe des Kugelbildes in **vw**. Macht man noch **VV'** gleich **WW'** $\frac{3}{10}$ von **a'V**, zieht **V'a** und **W'a**, ergänzt das perspectivische Quadrat durch Parallelen mit **VW**, legt in ihm Diagonalen 2c., so

kann die Ellipse vnwl als Bild der Kugel gezeichnet werden.

Da diese Construction eine allgemeine Anwendung zuläßt und jeden Fall umfaßt, so empfehlen wir sie vor allen andern; zumal sie den großen Vortheil der Einfachheit voraus hat. Man sieht, daß sie auf der Lehre von den schiefen Ebenen beruht.

Weit beschwerlicher und unsicherer sind diejenigen Constructionen, wo man eine Anzahl Parallelkreise zeichnet und deren äußerste Puncte durch tangirende elliptische Linien verbindet, man mag dazu horizontale oder senkrechte Kugelschnitte wählen.

214. — **Aufgabe.** Eine achteckige Kuppel perspectivisch zu entwerfen (Fig. 154 und 154a und b).

Es sei **AB** die Diagonale des Achtecks und dieses nach den bekannten Regeln projicirt. Mit der halben Diagonale beschreibe man den Halbkreis **A**, 1, 2, 3, **O**, 4, 5, 6, **B**, theile ihn in 2**n** gleiche Theile, welche hier mit 1,2,3,... bezeichnet sind, und ziehe durch diese Puncte Parallelen mit **AB**: so ist damit die mittlere senkrechte Durchschnittsfläche dargestellt, die durch horizontale Parallelebenen geschnitten wird. Man denke sich durch die Ecken des Grundecks Meridiane gelegt und construire in jeder der Parallelebenen ein dem untern ähnliches Achteck, dessen Ecken in den Meridianen liegen, so ist auf diese Weise die Kuppel ohne Weiteres gefunden, und da die Ecken der Polygone in der Kuppelfläche liegen, und die Verbindung derselben Meridiane geben, auch die verlangte Kuppel.

Um die Construction zu vereinfachen, befolge man nachstehendes Verfahren, wozu die Hülfsfiguren 154**a** und **b** gehören.

Man ziehe mit dem Halbmesser **AM** den Viertelkreis **DD'C**, theile den Bogen in **n** Theile (hier

4) und ziehe EF, GH, IK parallel CD. Diese Halbmesser der Durchschnittsebenen trage man Fig. 154b auf die Quadratseite LR, die gleich AM Fig. 151 ist, in LN, LP, LQ, ziehe die Diagonale LS und trage die Puncte von LR auf die Diagonale in n, p, q über. Zuletzt ziehe man noch die Senkrechten nN', pP', qQ' und GR.

Nach dieser Vorbereitung trägt man in Fig. 154 aus Fig. 154b die Puncte von der Linie LR in die gleichnamigen zu beiden Seiten von M und schneidet aus denselben die Parallelen 1,6; 2,5; 3,4 durch Normalen in 26, 28, 30, 31, 29, 27. Aus den ebengenannten Puncten und den Theilpuncten auf dem Halbkreis entstehen die perspectivischen Puncte der Achtecke, mit Hülfe des Augenpunctes und der Distanzpuncte. Man ziehe z. B. durch m der Axe eine Richtung von dem Distanzpunct aus, eine andere von dem Augenpunct durch 27; der Punct m', wo sich diese Linien schneiden, ist einer der gesuchten Eckpuncte.

Einen zweiten findet man in n', wo die Richtungen durch n und 29 sich schneiden. Dasselbe Verfahren beobachtet man auf der andern Seite, wo man sich durch Horizontale aus den bereits gefundenen Puncten m' und n' helfen kann, wenn der zugehörige Distanzpunct nicht zu benutzen ist. Wie bei dem untern Achteck die Puncte bf, ce, so liegen auch die correspondirenden der obern Parallelebenen auf gleicher Horizontale. Ueberhaupt gibt das untere Achteck die beste Auskunft über die Beziehungen, in welchen die Ecken der andern Achtecke stehen.

Daß übrigens eine kugelförmige Kuppel, deren Parallelschnitte Kreise sind, ebenso behandelt werden muß, wenn daran gelegen ist, Meridiane darauf zu bestimmen, bedarf keiner Bemerkung. Auch die innere Ansicht einer kugelförmigen Kuppel mit Gewölbrip-

pen, Cassetten und dergleichen wird nach dieser Construction gefunden; und es wird nicht schwer fallen, diejenigen Modificationen zu finden, welche sie auf elliptische Gewölbe anwendbar macht.

215. — **Aufgabe.** Einen Porticus, den viereckige Säulen bilden, mit dem Hauptgesims zu zeichnen, wenn die architectonischen Profile und übrigen Maße gegeben sind.

Die geometrische Form der, mit der Tafel parallelen Seite ist das Rechteck abcd. An ac werden die geometrischen Profile o,1,2...5; e,g und 6,78...10,c angetragen, auf die rechtwinklich anstoßende Seite in a,o',1',2'....5; c',g und 6,7',8'...10',c' übertragen und aus den Ecken der letztern Profile die Linien der Stufen und der Gliederung gezogen. Bei der Säule **M**, welche mit der Kante **bb'** in der Linie bd liegt, wird das Profil an der innern Kante geometrisch gezeichnet und dann perspectivisch in F übertragen. Wir müssen hier diese Constructionen als bekannt voraussetzen und bemerken nur, daß man, die obere Ecke h des Abacus zu finden, aus der übereinstimmenden Ecke des geometrischen Profils eine Linie nach dem Augenpunct zieht und diese aus dem Fußpunct F der Ordinate schneidet, auf gleiche Art bei allen Ecken verfährt, weßhalb das Profil auch in b' aufgetragen werden muß. Da die Säulen ins Quadrat gestellt sind, so ist auch h'kgi ein Quadrat, und alle übrigen Säulen können dergestalt durch Gesichtslinien und Diagonalen aus dem Distanzpunct angeordnet werden. Damit man jedoch nicht in Fehler verfalle, ist es besser, die Säulenschäfte, von dem Podium bis zum Unterbalken, ohne Rücksicht auf Fuß und Kapitäl zu zeichnen und diese dann, wie gelehrt, anzusetzen, wenn der ganze perspectivische Entwurf des Baues

dargestellt ist. Man erhält dadurch zugleich so manche Erleichterung bei der Projicirung der architectonischen Glieder, worauf man immer Bedacht nehmen muß. Dergleichen Hülfsmittel sind zu localer Natur, als daß sie in Regeln eingekleidet werden könnten. Wer die vorhergegangenen Aufgaben inne hat, wird sich solche leicht selbst ableiten.

Auch braucht man häufig das Abschieben durch Parallelen. Es stehen nemlich die Säulen **M** und **O**, desgleichen **P** und **N** in einer Verticalebene, und da bei allen die Formbildung gleich auch paarweise der Abstand von der Grundlinie derselbe ist, so müssen auch alle correspondirenden Glieder und Ecken auf einerlei Horizontalen liegen. Dies würde für alle übrigen gelten, wenn die von **M** auslaufende Reihe nicht verdeckt wäre. Ebenso correspondiren die Säulen Q, Q_1 und R, R_1.

In lm, wo ein Vorbau lmno rechtwinklich auf das Gebäude stößt, bedarf man der Profile nicht, um die Figur der Gliederung zu finden, wo sie sich durchdringt. Man trägt die Puncte $c', 9_1, 8_1 \ldots$ durch Gesichtslinien auf lm über und schneidet die Gesichtslinien, die aus den Profilpuncten 10,9,8... kommen, mittelst der übertragenen Puncte aus dem Distanzpunct; wodurch sich der rechtwinkliche Durchschnitt der Glieder unmittelbar ergibt. Das gleiche Verfahren läßt sich auch auf no und bd anwenden.

Ebenso verfährt man bei den Stufen. Man zieht Gesichtslinien aus $a, 1_1, 2_1$, nach ml und schneidet die Gesichtslinien, die aus den Puncten o,1,a,2 gezogen worden, durch Theillinien aus den auf ml übertragenen Puncten. Auf gleiche Weise erhält man den Fußpunct der vordern Stufe bei o'. Man bemerke noch, daß die Kanten des Architravs immer mit der äußern Kante der unten stehenden Säulen in eine senkrechte Linie fallen; ebenso die Kanten

des Obersatzes. Auch ist das Quadrat des Abacus gleich dem der Fußplatte, wodurch man die Fußplatten durch Senkrechte leicht abschneiden kann, wenn die Kapitäler gezeichnet sind.

Drittes Kapitel.

Größere Uebungsaufgaben.

216. — **Aufgabe.** Es soll der in vorliegender Tafel angegebene Raum **ABCE** mit einem Kreuzgewölbe überspannt werden, dessen Element der Spitzbogen ist (Taf. 35).

Die Pfeilerstellung nach der Linie om ist unter dieser Richtung gegen die Grundlinie der Tafel geneigt; in d befindet sich der Hauptpunct, in t der Verschwindungspunct für die Theillinie, die 45° Neigung gegen om eingehen. Wir überlassen dem Leser, das bis hieher Vorgetragene bei der Projection dieses Gewölbes in Anwendung zu bringen, die Tafel als Uebungsblatt zu betrachten, und erlauben uns nur einige Andeutungen.

Vor Allem hat man den Gewölbbogen geometrisch zu construiren, ihn von der Spitze ab in eine Anzahl gleicher Theile zu theilen, Senkrechte aus diesen Theilpuncten zu fällen und deren Fußpuncte auf dem Bogendurchmesser auf die Grundlinie der Tafel und von da auf die Grundlinie om der Pfeiler zu übertragen.

Man bilde nun auf der Grundebene die Quadrate rstu etc., die durch die Stellung der Pfeiler bedingt werden, mit Berücksichtigung der Bogenbreiten ps, nr etc. und der vw, op etc. Hierauf trage man die perspectivische Projection der Pfeiler selbst ein, ziehe die Diagonalen su, rt etc., so daß sich auf

der Grundebene die ganze horizontale Projection des Baues perspectivisch darstellt. Zieht man noch durch die Puncte i,h,g,h',i und 1,2,3,4,5 Richtlinien nach d, so schneiden diese die Diagonalen in Puncten, welche mit senkrecht darüberliegenden Puncten der Gradbögen correspondiren.

Zugleich kann man aus den Durchschnittspuncten der Diagonalen perspectivische Parallelen mit np ziehen, um diese Hülfspuncte analog auf ru, Aw rc. in 1',2',3',4',5' rc. zu erhalten. Auf die Senkrechte nx setze man die Pfeilerhöhe na und in b,c,e diejenigen Puncte aus dem geometrischen Profil, die sich auf die Höhe der Bogen beziehen. Man zeichne nun die Pfeiler selbst, schneide sie in der zukommenden Höhe und construire die Figur der obern Querschnitte, wo die Gewölbe ihren Anfang nehmen.

Die Construction der Bögen und der Grate geschieht nun nach Fig. 148, 149 und 150.

Man thut wohl, zuerst diejenigen Bögen zu projiciren, die parallel der Linie om, dann die Gradbögen und zuletzt die der Richtung Au zu zeichnen, weil sie sich in dieser Reihenfolge decken und die letztern oft nur in kurzen Linien sichtbar werden. Jedoch ist anzurathen, daß man Bögen, die in größerer Länge, obwohl nicht ganz, gesehen werden können, vollständig entwerfe. Man entgeht dadurch oft Mißgriffen bei der Construction. Es bleibt aber immer eine Hauptregel, bei dergleichen Zeichnungen alle überflüssigen Linien zu vermeiden, wenn man es vielleicht durch einzelne, kurze Schnitte abthun kann. Man wird sonst in ein Labyrinth von Linien verwickelt, aus dem kein Ariadnefaden hilft.

Man bediene sich deßhalb auch nur feiner, englischer Bleistifte, oder doch solcher, deren Spur sich leicht verwischen läßt, (die Nummern H und HB taugen hierzu am Meisten); und ziehe im Laufe des

Zeichnens diejenigen Theile, von deren Genauigkeit man sich überzeugt hat, und welche von vorliegenden Theilen nicht gedeckt werden, nach und nach mit Tusche aus.

217. — Einige Zeichner haben die Gewohnheit, im Hauptpuncte, in denen viel Linien convergiren, Nadeln zu stecken; es ist dies aber nicht zu empfehlen. Starke Nadeln geben unrichtige Linien, schwache brechen leicht ab und es gestattet die zurückgebliebene Spitze nicht, neue Nadeln einzustecken; ungerechnet, daß sie sich beim Anlegen biegen, so daß die Richtung den Punct nicht genau schneidet.

Ich bediene mich in dergleichen Fällen eines kleinen, sehr einfachen Instruments, welches in Fig. A der 33. Tafel in natürlicher Größe dargestellt ist, und, besonders wenn der Anlegepunct weit abliegt, vorzügliche Dienste leistet. **M** ist die Ansicht von unten, **N** die Seitenansicht; **a** ist ein Stahlplättchen, an welchem die feine Spitze b angefeilt ist. Dieses ist mittelst eines Sägeschnitts in ein Messingplättchen eingelöthet, in welchem noch zwei Stahlspitzen **c** und d gelöthet oder genietet sind. Die Stahlplatte hat vorn eine stumpfe Messerschneide, welche genau über den Punct gestellt und die Spitzen in das Zeichnenbret gedrückt werden.

Wenn man nicht darauf zu achten braucht, daß der Anlegepunct erweitert wird, so läßt sich auch die eine Spitze unmittelbar unter der Schneide anbringen.

Auch hat man Vorrichtungen, um den Horizont in größerer Länge benutzen zu können; dergleichen ist ein Winkel von Holz in der Form von $\underset{a\quad b}{\perp}$, dem durch Anschrauben bei **a** und **b** an die Seitenkante des Zeichnenbrets und sonst eine völlig sichere Lage gegeben wird.

Mehrere Hülfsinstrumente, z. B. einen Ellipsograph, kann man zu Erleichterung der Arbeit benutzen.

Das Zeichnenbret und die Reißschienen müssen genau abgerichtet sein, der Kopf ohne Wanken anschlagen; und dabei schlage man nie an zwei anstoßende Seiten des Brets an, um rechte Winkel zu ziehen, sondern bewirke dieses stets durch Anlegen eines hölzernen oder stählernen Winkels.

Nur bei der größten Genauigkeit der Instrumente und des Operirens ist es möglich, bei größern Arbeiten genügende Resultate zu erhalten, wo oft die kleinste Abweichung von der Mitte eines Punctes von Folgen ist.

Bei'm Verleger dieses sind erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

**Hertel, A. W. (vormal. königl. Preuß. Bau-Inspector und Oberlehrer der königl. Provinzial-Gewerbsschule zu Naumburg), kleine Akademie der zeichnenden Künste und der Malerei, enthaltend einen vollständigen Cursus der Elemente der Anatomie und der Verhältnisse des menschlichen Körpers; den Ausdruck der Leidenschaften, die Grundzüge der Portrait-, der Blumen-, Landschafts- und historischen Malerei, der geometrischen Projectionslehre, der Linear-, freien und Luftperspective, der schönen Baukunst, der Lehre von dem Lichte und den Farben rc. — Für Zeichner und Maler in Crayon, Pastel, en Lavis, Miniatur, Gouache, Oel- und Schmelzfarben rc. — Nebst einer systematischen Abhandlung über Chemie der Farben. Mit 18 Kupfertafeln. 8. 842. 2¾ Rthl. oder 4 fl. 57 kr.

Dieses schön ausgestattete Werk liefert in gedrängter Vollständigkeit und im leichtfaßlichen, durch viele Abbildungen veranschaulichten Vortrag die Anleitung und Beschreibung zu allen einzelnen Theilen, welche zu den zeichnenden Künsten und zur Malerei gehören. Mit unermüdlichem Fleiße hat der selbst sachkundige Hr. Verf. hier eine große Menge von Lehren, Erfahrungen und Notizen compendiös zusammengetragen, was in sehr vielen guten deutschen und ausländischen Werken zerstreut umherstand, auch die neuesten Fortschritte der Kunst aufmerksam berücksichtigt, so daß diese kleine Academie einen nicht nur sehr lehrreichen, sondern auch interessanten und ansprechenden Inbegriff aller Theile der Malerei bildet, nicht nur für Solche, welche sie als Broderwerb betreiben, sondern auch für die, welche sie als ein Erhöhungsmittel der Annehmlichkeiten des Lebens betrachten.

**Bleichrodt, W. G. Handbuch für den architectonischen Zeichnungsunterricht und die Verfertigung der Baurisse und Bauanschläge rc. Nebst Holzberechnungstabellen, Abhandlung über Kenntniß und Anwendung des Baumaterials, über Fuhr- und Arbeitslöhne. Zum Selbstunterricht des angehenden Architecten und Bauhandwerkers; auch für Realschulen brauchbar. — Vierte sehr vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 9 lithographirten Originaltafeln architectonischer und geometrischer Planzeichnungen und Risse. gr. 8. 843. 1⅛ Rthl. oder 2 fl. 42 kr.

Der Zweck dieses Buches ist: den Zimmerleuten und Mau-

. 4. 8¾ Sgr.
. r. 5. 7½ Sgr. — 6. 8¾ Sg.
1 7½ Sgr. — Wird fortgesetzt.